Test blanc le lundi 10 novembre

10:15 — 11:15 salle CE 16

S.v.p. attendre l'invitation pour entrer

Disponibles sur Moodle, semaine 9 :

Liste d'étudiant-e-s inscrit-e-s

Plan de la salle CE 16

8 QCM + 5VF 60 minutes

Sujets : cours 1 – 15. , semaines 1–8.

Materiel : stylo à encre noire ou bleue foncée, crayon, gomme, correcteur blanc, (feuilles de brouillon)

Aucun document ni aucun outil éléctronique n'est autorisé.

Le test ne comptera pas dans la note finale.

Rappel : Formes indéterminées $\infty-\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0.$

Ex1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)=-1$

Ex2 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+x^2-2x}{(x-1)^2}$ $\quad \frac{0}{0}$

$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$y=x-1 \Rightarrow x\to 1 \Rightarrow y\to 0,\ x=y+1$

$$x^2-2x=(y+1)^2-2(y+1)=y^2+2y+1-2y-2=y^2-1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}+\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}=\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right);\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)+y^2-1}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{\cancel{1}-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)+y^2-\cancel{1}}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{y^2-2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{y^2}=$$

$$=\lim_{y\to0}\left(1-2\underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}y\right)}{\left(\frac{\pi}{4}y\right)^2}}_{\to 1}\frac{\left(\frac{\pi}{4}y\right)^2}{y^2}\right)=1-\frac{\pi^2}{8}$$

Propriétés des limites infinies

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$

(1) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$

(2) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, $g(x)$ est bornée au voisinage de $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big) = \pm\infty$

Ex: $f(x) = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ $\quad g(x) = \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{bornée}}$ $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$

(3) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \underline{\ell \neq 0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \begin{matrix} +\infty & \text{si } \ell > 0 \\ -\infty & \text{si } \ell < 0 \end{matrix}$

Ex. $\lim_{x\to 0} \frac{2x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \underbrace{(2x-1)}_{\to -1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} = -\infty$

(4) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

(5) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ et $f(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} +\infty, & \text{si } f(x) > 0 \text{ au voisinage de } x_0 \\ -\infty & \text{si } f(x) < 0 \text{ — " —} \\ \text{n'existe pas, autrement} \end{cases}$

Ex: $\lim_{x\to 0} (-x^2) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{-x^2} = -\infty$

Mais $\lim_{x\to 0} x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas

(6) „Gendarmes" Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $g(x) \geq f(x)$ $\forall x$ au voisinage de x_0 $\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

$-\infty$ $g(x) \leq f(x)$ — " — $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

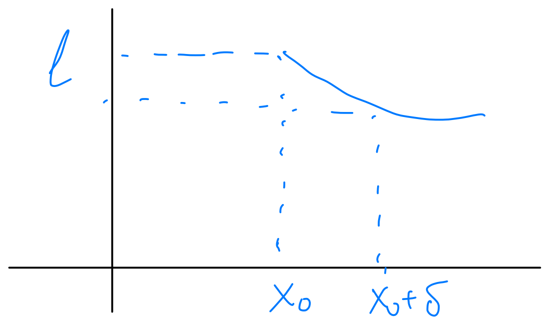
Les propriétés (1)-(6) sont toujours valables lorsque $x \to \pm\infty$.

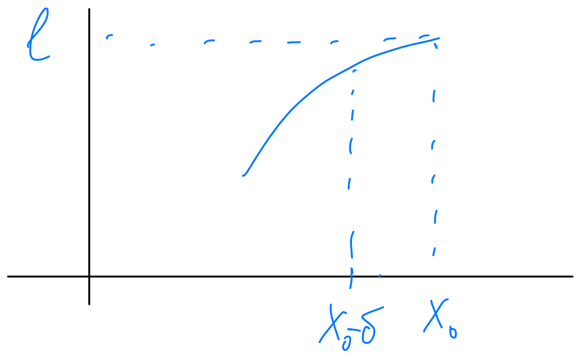
Limites à droite et à gauche

Déf $f : E \to F$ est défini à droite (à gauche) de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0, x_0+\alpha[\subset E$ $(]x_0-\alpha, x_0[\subset E)$.

Déf $f : E \to F$ définie à droite (à gauche) de x_0 admet pour limite à droite (à gauche) de x_0 le nombre réel ℓ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$:

$$\forall x \in E : \underbrace{0 < x - x_0 \leq \delta}_{\text{à droite}} \quad \underbrace{(0 < x_0 - x \leq \delta)}_{\text{à gauche}} \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$





Notation:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell}$$

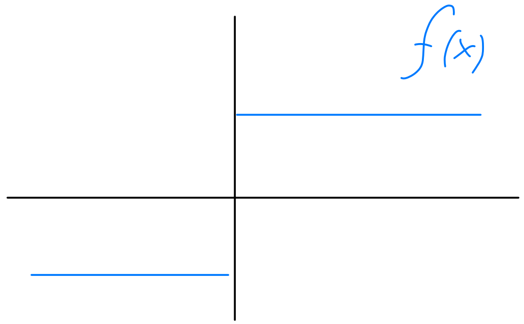
à droite

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell}$$

à gauche.

Remarque. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$.

Ex. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$



$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

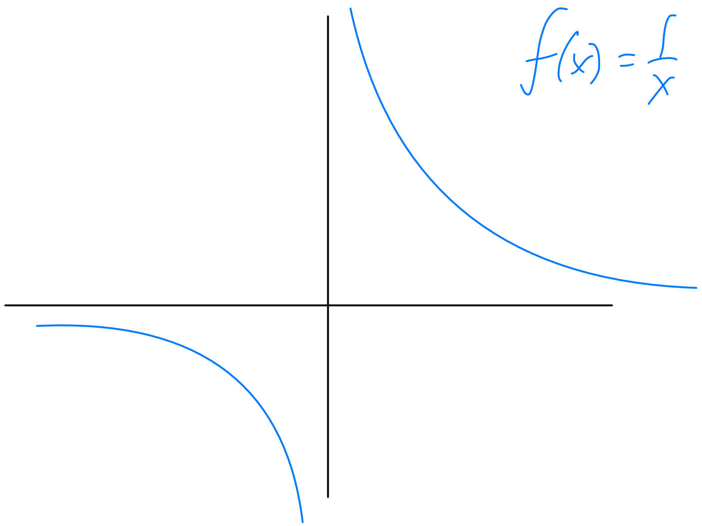
$\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas

Remarque. On peut aussi définir les limites $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$

Ex : $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas.



§4.3. Fonction exponentielle et logarithmique

Déf. $\boxed{e^x \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}$ (Rappel: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument $\forall x \in \mathbb{R}$ par le critère de d'Alembert:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Big)$$

Convention: $0^0 = 1,\ 0! = 1$ $\left(\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Big|_{x=0} = 0^0 = 1 \ ;\ \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1 \Rightarrow 0! = 1 \right)$

Proposition.
(1) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
(2) $e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
(3) $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ex: $m = 3$

$$\sum_{k+p=3} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^p}{p!} = \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2!} \cdot \frac{y}{1} + \frac{x}{1} \cdot \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} \right)$$

Idée: (1)

$$e^x \cdot e^y = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)} \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{y^p}{p!}}_{\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \ldots\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k+p=m} \frac{x^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{y^{\overset{m-k}{p}}}{p!}}_{(m-k)!} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!(m-k)!} \cdot x^k y^{m-k} \right) =$$

$p = m - k$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \underbrace{\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} x^k y^{m-k}}_{(x+y)^m \text{ binome de Newton}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (x+y)^m \overset{(\text{déf})}{=} e^{x+y}$$

(2) $e^x e^{-x} \overset{(1)}{=} e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} = 1 \Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x}$) $\Rightarrow e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

(3) $e^x > 0$: $e^x = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Propriétés de la fonction $f(x) = e^x$

(1) $\lim_{x \to \infty} e^x = \lim_{x \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \underset{x>0}{\geq} \lim_{x \to \infty} (1+x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to \infty} e^x = +\infty$

(2) $\lim_{x \to -\infty} e^x \underset{y=-x}{=} \lim_{y \to \infty} e^{-y} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{\underbrace{e^y}_{\to +\infty}} = 0$

(3) $e^x \uparrow$ est strictement croissante $\forall x \in \mathbb{R}$. Si $x > y$

Soit $x > y \Rightarrow e^{x-y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-y)^k}{k!} \underset{(x-y)>0}{>} 1 + \underbrace{(x-y)}_{>0} > 1 \Rightarrow e^x = e^y \cdot \underbrace{e^{x-y}}_{>1} > e^y$

$\Rightarrow e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est strictement croissante $\Rightarrow$ injective $(x > y \Rightarrow e^x > e^y)$

surjective (à voir plus tard)

Proposition. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$k=0 \Rightarrow \dfrac{x^0}{0!}=1$ $\qquad$ $k=1 \Rightarrow \dfrac{x^0}{1!}=1$

Dém:

$$\left|\frac{e^x-1}{x}-1\right| = \left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-1}{x}-1\right| = \left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}{x}-1\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!}-1\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{k!}\right| \overset{\Delta}{\leq} \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|x|^{k-1}}{k!} = |x|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|x|^{k-2}}{\underbrace{k!}_{k!>(k-2)!}} < |x|\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|x|^{k-2}}{(k-2)!}}_{n=k-2} = |x|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!} = |x|e^{|x|}$$

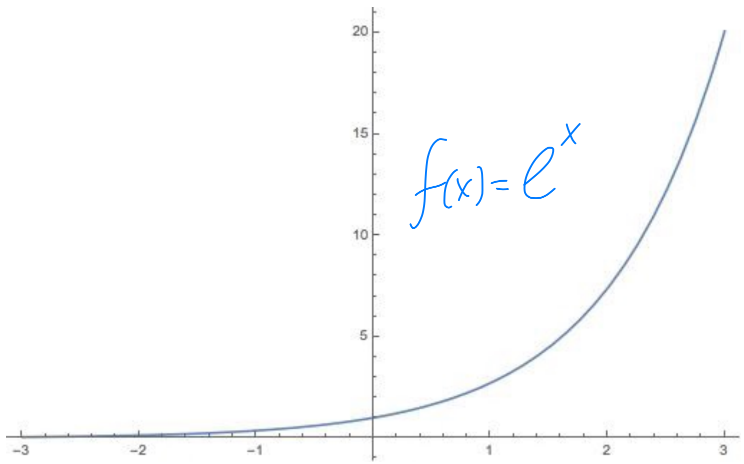
$$\underset{\substack{\downarrow x\to 0\\ 0}}{0} < \left|\frac{e^x-1}{x}-1\right| < |x|e^{|x|} < \underset{\substack{\downarrow x\to 0\\ 0}}{|x|\cdot e}$$

$x\to 0 \Rightarrow |x|<1$

$\Rightarrow$ par les 2 gendarmes on obtient la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{e^{t(x)}-1}{t(x)}=1 \quad \text{si } \lim_{x\to a}t(x)=0 \text{ et } t(x)\neq 0 \text{ au voisinage de } x=a}$$



On a: $e^x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ bijective $\Rightarrow$ on peut définir la fonction réciproque

Fonction logarithmique. (Logarithme naturel = logarithm népérien; John Napier)

$e^x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ bijective $\exists \ln x : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que

$$e^x = y \iff x = \ln y \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*$$

Propriétés. (1) $e^{\ln x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (fonctions réciproques)

(2) $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$

(3) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

(4) $\ln(x^r) = r \ln x \quad \forall r \in \mathbb{Q}$, en fait $r \in \mathbb{R}$

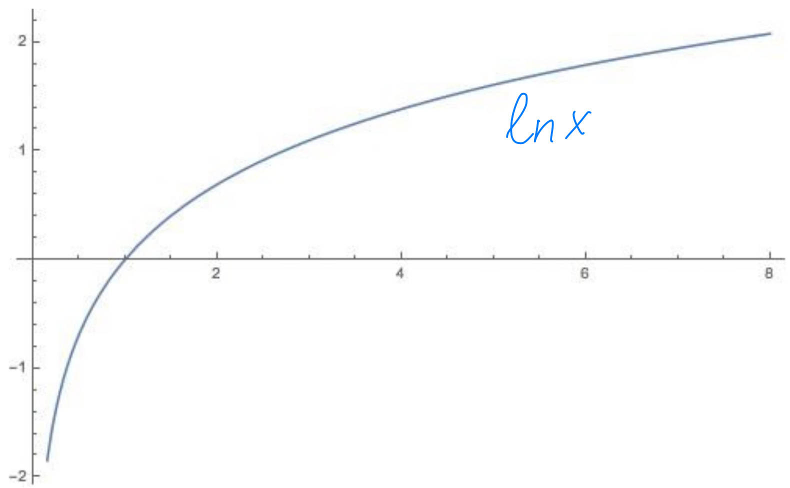
(5) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1 \qquad e^0 = 1,\ e^1 = e$

Dém: (2): $e^{(\ln x + \ln y)} = \underbrace{e^{\ln x}}_{x} \cdot \underbrace{e^{\ln y}}_{y} \overset{(déf)}{=} x \cdot y =$

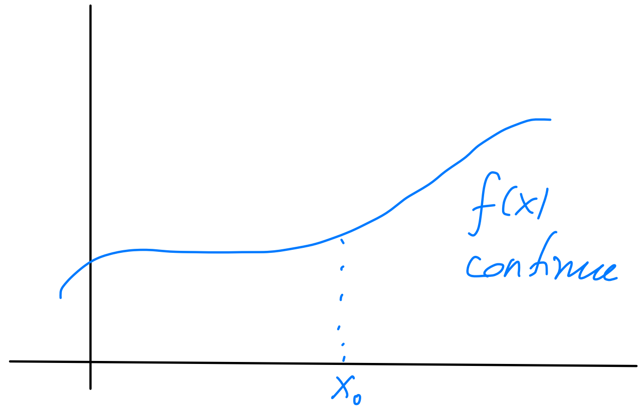
$\overset{(déf)}{=} e^{\ln(x \cdot y)} \Rightarrow \ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

puisque e^x est bijective.

(3)-(5) [DZ §7.2]



§4.4. Fonctions continues



Déf Une fonction $f : E \to F$ est continue en un point $x_0 \in E$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

3 condition de continuité de f en $x = x_0$

$$\begin{cases} (1) \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R} \text{ existe} \\ (2)\ f(x_0) \text{ existe} \\ (3) \text{ l'une est égale à l'autre} \end{cases}$$

Ex.
(1) $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}$ est continue sur $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x \to a} x^p = a^p \quad \forall a \in \mathbb{R}$

(2) Tout polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ (opérations algébriques).

(3) Toute fonction rationelle sur son domaine

(4) $f(x) = \sqrt[p]{x}$ est continue sur son domaine $\forall p \in \mathbb{N}$ $\left(\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, a > 0\right)$

(5) $f(x) = \sin x$ et $g(x) = \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ sont continues sur leurs domains de définition

$$\lim_{x \to a} \sin x = \lim_{x \to a} \sin(a + (x-a)) = \lim_{x \to a}\Big(\sin a \underbrace{\cos(x-a)}_{\searrow 1} + \cos a \underbrace{\sin(x-a)}_{\searrow 0}\Big) = \sin a. \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$x \to a$

(1) e^x est continue $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0}\left(e^x-e^{x_0}\right)=\lim_{x\to x_0}e^{x_0}\left(e^{x-x_0}-1\right)=\lim_{x\to x_0}\underbrace{e^{x_0}}_{=e^{x_0}}\underbrace{\frac{e^{x-x_0}-1}{x-x_0}}_{\to 1}\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0}=0$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}e^x=e^{x_0}\ \forall x_0\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$

(2) $e^x\uparrow\ \Rightarrow \ln x\uparrow$ $\qquad x<y\iff \underset{u}{e^x}<\underset{t}{e^y}$

$\ln u<\ln t\iff u<t$

on peut démontrer que la fonction réciproque à une fonction continue est continue

(3) $\ln x$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en particulier $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0=\ln 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\underset{x=\ln y}{=}\lim_{y\to 1}\frac{e^{\ln y}-1}{\ln y}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\ln y}=1\Rightarrow\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1}=1$$

Soit $y=1+z\Rightarrow y\to 1\Rightarrow z\to 0$

$$\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1}$$

(4) $$\frac{\ln(1+z)}{z}=\ln\left((1+z)^{\frac{1}{z}}\right)\xrightarrow[z\to 0]{}1,\ e^x \text{ est continue}\Rightarrow\lim_{z\to 0}e^{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}}=e^1$$

$$\Rightarrow\lim_{z\to 0}e^{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}}=\lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

généralisation de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

Finalement on a des limites remarquables:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to a} \frac{e^{t(x)} - 1}{t(x)} = 1 \quad \text{si } \lim_{x\to a} t(x) = 0$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\ln(1+t(x))}{t(x)} = 1 \quad \text{si } \lim_{x\to a} t(x) = 0$$

$$\lim_{x\to a} (1+t(x))^{\frac{1}{t(x)}} = e \quad \text{si } \lim_{x\to a} t(x) = 0$$

$t(x) \neq 0$ au voisinage de $x=a$

Question 15.

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^{\left(\frac{1}{\ln(x^2)}+\ln 3\right)}-3\right)\cdot\ln x$$

A vaut ∞

B. vaut $\ln 3$

C. vaut 0

D. vaut $\frac{3}{2}$

$$\overset{\to\infty}{\ln x}\left(e^{\ln 3+\frac{1}{\ln x^2}}-3\right)^{\to(3-3)}=\ln x\left(3e^{\frac{1}{\ln(x^2)}}-3\right)=$$

$$=3\ln x\left(e^{\frac{1}{\ln(x^2)}}-1\right)=$$

$$=3\,\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{\ln(x^2)}}-1}{\frac{1}{\ln(x^2)}}}_{\to 1}\cdot\frac{\ln x}{\ln(x^2)}=\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{\ln(x^2)}}-1}{\frac{1}{\ln(x^2)}}}_{\to 1}\ \underbrace{\frac{3\cancel{\ln x}}{2\cancel{\ln x}}}_{\to\frac{3}{2}}\to\frac{3}{2}$$

$$\ln(x^2)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$$

$$\frac{1}{\ln(x^2)}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$$