Test blanc le lundi 10 novembre pendant le cours, CE6.

Inscription est fermée.

Test blanc : 8 QCM + 5 VF 60 min

Sujets : cours 1-15, semaines 1-8.

Materiel : stylo à encre noir ou bleu foncée, crayon, gomme, correcteur blanc
feuilles de brouillon

Aucun document ni outil éléctronique n'est autorisé.

Le test ne compte pas pour la note finale.

Rappel: Théorème des 2 gendarmes.

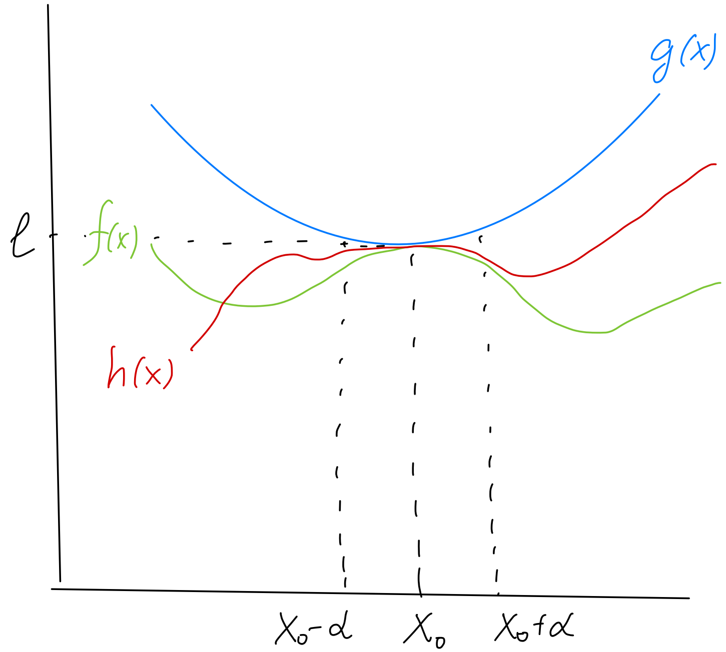
Soient $f, g, h : E \to F$ trois fonctions telles que

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

(2) $\exists \alpha > 0 : \forall x \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}$, on a

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

Alors $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$



Exemple important: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

$|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ pour x proche à 0, $x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 0$

$$1 \leq \frac{|x|}{|\sin x|} \leq \frac{1}{|\cos x|}$$

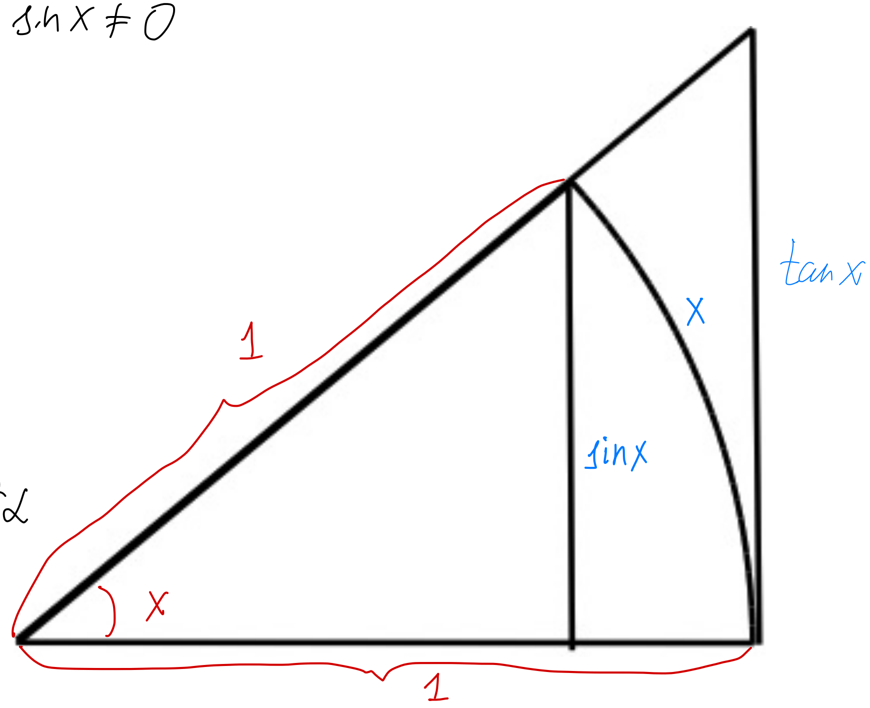
$\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$ x proche à 0.

$x \to 0$?

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

$$|1 - \cos x| = 2\left|\sin^2\frac{x}{2}\right| = 2\sin^2\frac{x}{2} \leq 2\left(\frac{x}{2}\right)^2$$



$$0 \leq |1-\cos x| \leq 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow \text{par les 2 gendarmes } \lim_{x\to 0} |1-\cos x| = 0$$

$x \to 0$: $0 \to 0$, $2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \text{par les 2 gendarmes } \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$x \to 0$: $1 \to 1$, $\frac{1}{\cos x} \to 1$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Théorème Limite de la composée des 2 fonctions.

Soit $f: E \to F$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$; $g: G \to H$, $\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$

Supposons que $f(E) \subset G$ et $\exists \alpha > 0 : 0 < |x-x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) \neq y_0$

Alors $\lim_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = \ell$.

Dém: $\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : 0 < |y-y_0| \leq \delta_1 \Rightarrow |g(y)-\ell| \leq \varepsilon$

Aussi $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \iff$ pour $\delta_1 > 0\ \exists \delta_2 > 0 : 0 < |x-x_0| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x)-y_0| \leq \delta_1$

Soit $\delta = \min(\delta_2, \alpha) \Rightarrow \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta \left.\begin{array}{l} \Rightarrow |f(x) - y_0| \le \delta_1 \\ \Rightarrow 0 < |f(x) - y_0| \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < |f(x) - y_0| \le \delta_1$

$\Rightarrow |g(f(x)) - \ell| \le \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell.$

$\blacksquare$

Ce théorème nous permet de changer des variables dans les limites.

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

Ex 1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(4x) - \cos(2x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - 2\sin^2(2x) - 1 + 2\sin^2(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} 2 \cdot \dfrac{\sin^2 x - \sin^2(2x)}{x^2} =$

$$= \lim_{x \to 0} 2\left(\underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}_{\to 1^2} - \underbrace{\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2}_{\to 1^2} \cdot 4 \right) = 2(1 - 4) = -6.$$

$g(y) = \dfrac{\sin y}{y}$; $f(x) = 2x \Rightarrow \lim g(f(x)) = \lim\limits_{y \to 0} g(y) = 1$

Ex 2.

$\lim_{x\to x_0}\sqrt{\text{polynôme}(x)} = \sqrt{\text{polynome}(x_0)}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}-1} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2-2x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x}}\,\frac{\sqrt{x-1}+1}{x-1-1} = \lim_{x\to 2}\frac{\overset{(-1)}{\cancel{(2-x)}}}{\cancel{x-2}}\,\frac{\overbrace{\sqrt{x-1}}^{\to 1}+\overbrace{1}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt{x+2}}_{\to 2}+\underbrace{\sqrt{2x}}_{\to 2}} = -\frac{1}{2}.$$

Remarque. Par le Thm, $\lim_{x\to a}\frac{\sin(t(x))}{t(x)} = 1$ si $\lim_{x\to a} t(x) = 0$ et $\exists$ un voisinage de $x=a$ t.q. $t(x)\neq 0$.

$t(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

mais $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2\cos(\frac{1}{x}))}{x^2\cos(\frac{1}{x})}$ n'existe pas.

la fonction $\frac{\sin(x^2\cos(\frac{1}{x}))}{x^2\cos(\frac{1}{x})}$ n'est pas définie au voisinage de 0

Ex 3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sin(\sqrt{x+1}-2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\underbrace{\frac{\sin(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}-2}}_{\to 1}\,\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\sin(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{x+1-4}{\sqrt{x+1}+2}\cdot\frac{1}{x-3} = \lim_{x\to 3}\underbrace{\frac{\sin(\sqrt{x+1}-2)}{\sqrt{x+1}-2}}_{\to 1}\cdot\frac{\cancel{x-3}}{\cancel{x-3}}\,\frac{1}{\underbrace{\sqrt{x+1}+2}_{\to 4}} = \frac{1}{4}.$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}, \quad y = \sqrt{x+1}-2 \underset{x\to 3}{}$$

Ex 4. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas.

Il suffit de trouver deux suites (a_n) et (b_n) telles que $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) \neq \lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{b_n}\right)$, et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Soit $a_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ $n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = 1$

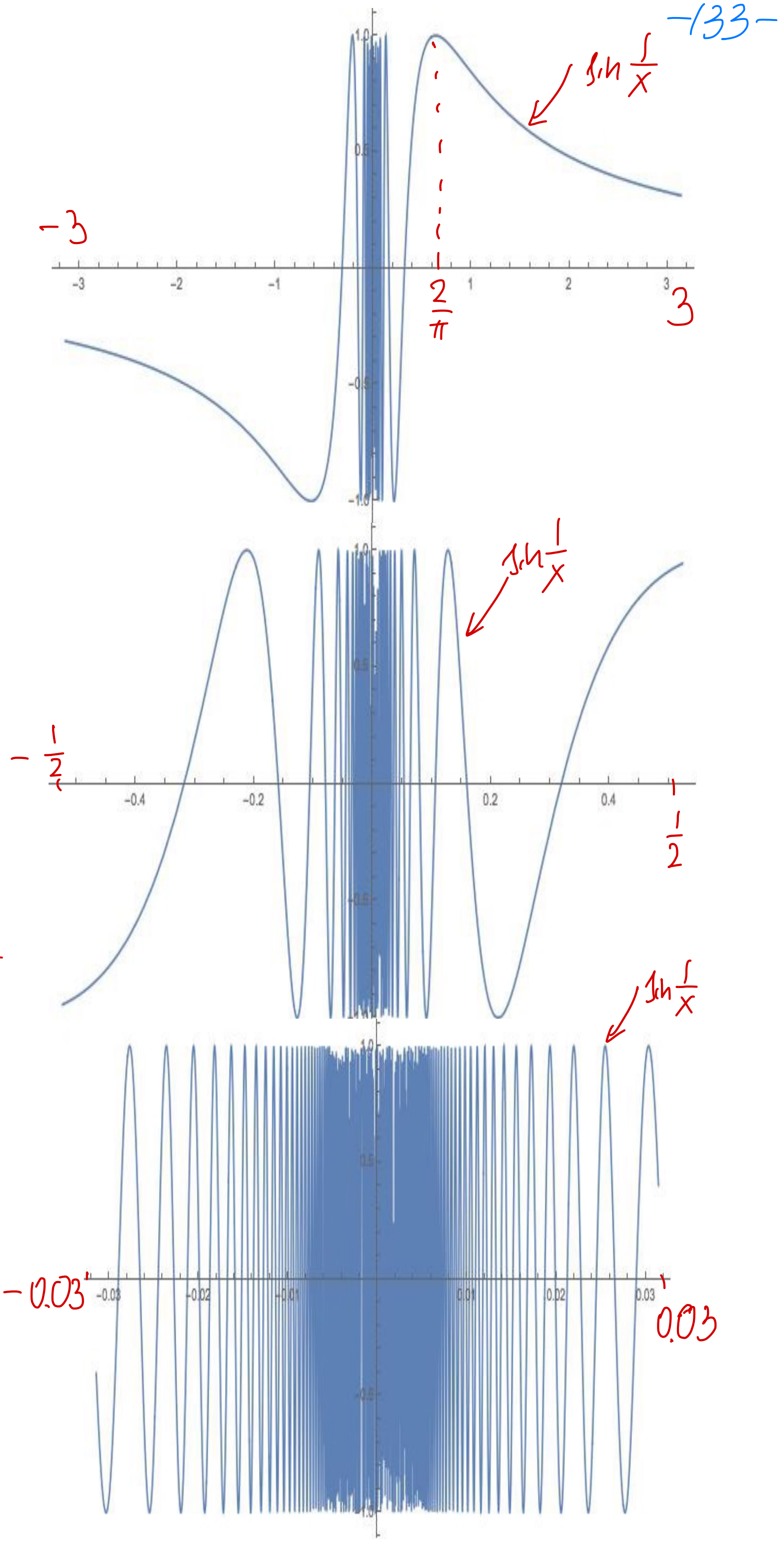
Soit $b_n = \dfrac{1}{\pi n}$, $n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\pi n} = \lim b_n = 0$

$\sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = \sin(\pi n) = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi n) = 0$

$\Rightarrow$ par la caractérisation à partir des suites

$\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas.



Ex 5. $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

On a : $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \quad \forall x \in D(f)$

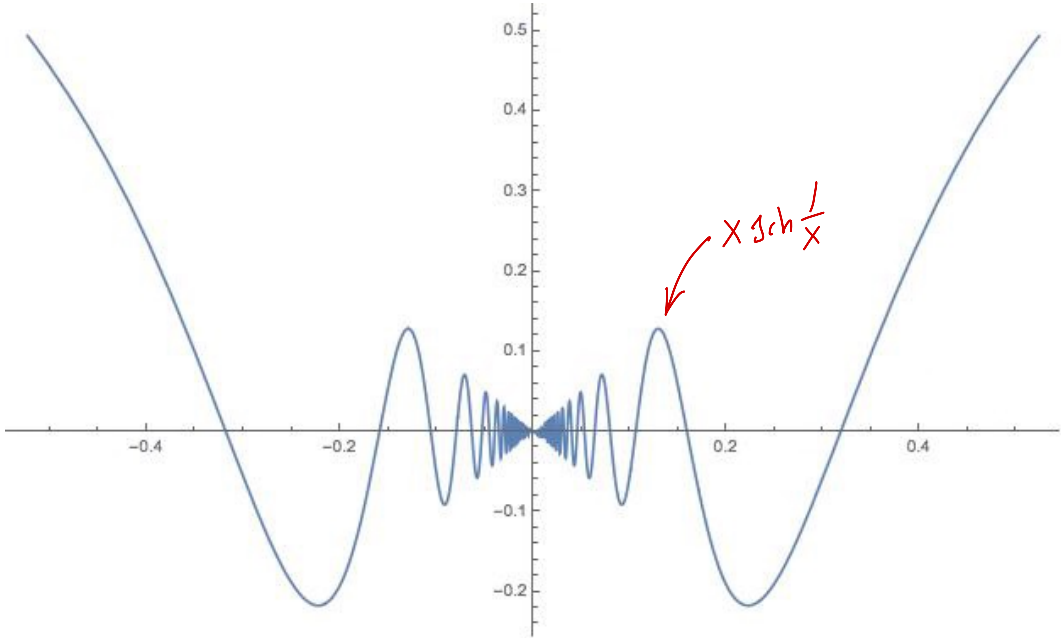
$\Rightarrow \quad 0 \leq \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$

multiplier par $|x| > 0$, $x \neq 0$

$$0 \leq \left|x \sin\frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

$x \to 0 \downarrow \qquad \downarrow x \to 0$

$0 \qquad\qquad 0$



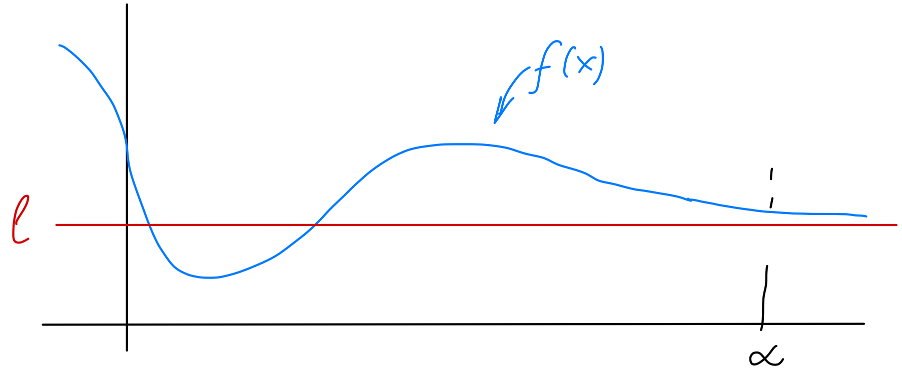
par les 2 gendarmes on obtient

$$\boxed{\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0}$$

Limites lorsque x tend vers $\pm\infty$

Déf $f: E \to F$ est définie au voisinage de $+\infty$ $(-\infty)$ si $\exists \alpha \in \mathbb{R}$:
$]\alpha, +\infty[\subset E$ (resp. $]-\infty, \alpha[\subset E$).

Déf $f: E \to F$ définie au voisinage de $+\infty$ $(-\infty)$ admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ $(-\infty)$ si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \alpha \in \mathbb{R}$:
$\forall x \in E$: $x \geq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
resp. $\forall x \in E$: $x \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.



Notation: $\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell \end{array}}$

Dans ce cas on dit que la fonction f admet un asymptote horisontale $y = \ell$ lorsque $x \to \infty$ (resp. $x \to -\infty$)

Ex. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Dém: Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $\alpha \in \mathbb{R}$: $\forall x \geq \alpha \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| \leq \varepsilon$

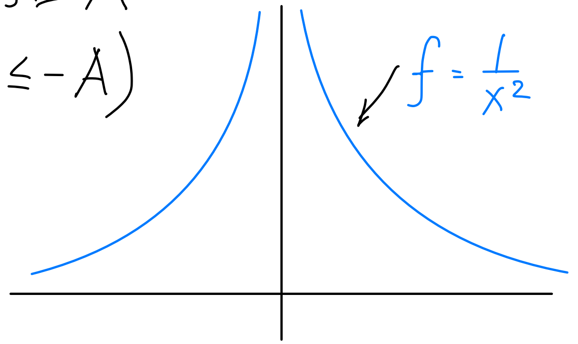
$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon$, $x \to +\infty \Rightarrow x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \sqrt{\varepsilon} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. On pose $\alpha = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

$\Rightarrow$ Si $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| \leq \varepsilon \Rightarrow$ par la déf $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Limites infinies.

Déf $f : E \to F$ définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$ $(-\infty)$ lorsque $x \to x_0$ si $\forall A > 0\ \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$
$(f(x) \leq -A)$

Notation: $\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \end{array}}$



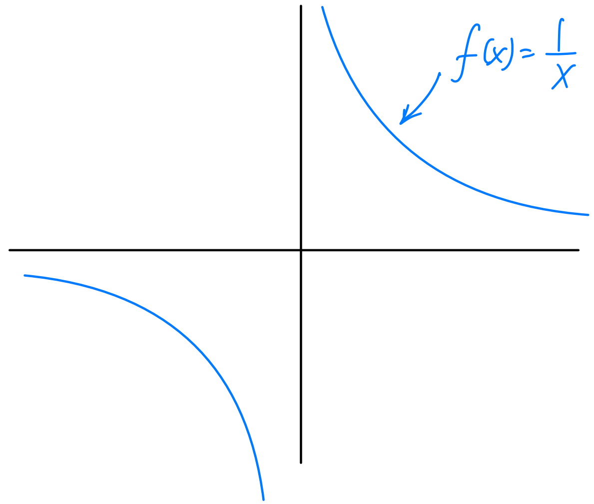
Ex $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$. Dém: Soit $A > 0$. Il faut trouver $\delta > 0$: $0 < |x - 0| \leq \delta \Rightarrow$

$\frac{1}{x^2} \geq A \iff \frac{1}{|x|} \geq \sqrt{A} \iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{A}}$ $\Rightarrow$ on pose $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$

Si $|x| \leq \delta = \frac{1}{\sqrt{A}} \Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq A \Rightarrow$ par la déf $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Ex. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ n'existe pas. Dans tout voisinage de 0 il existent $x_1 < 0 < x_2$ tels que

$\frac{1}{x_1} < -M$ et $\frac{1}{x_2} > M$ pour $M > 0$ choisi



Déf. $f: E \to F$ définie au voisinage de $+\infty$ $(-\infty)$ tend vers $\pm\infty$ lorsque $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ si

$$\forall A > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \geq \alpha, \Rightarrow f(x) \geq A$$
$$(f(x) \leq -A)$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall x \in E : x \leq \alpha, \Rightarrow f(x) \geq A$$
$$(f(x) \leq -A)$$

Notations:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Ex. $\lim\limits_{x \to \infty} x = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = \infty$

On a défini 4 types de limites:

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

(2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

(4) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.

Tous les resultats obtenus pour $\lim\limits_{x \to x_0}$ restent valables pour $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ [DZ, § 5.2.18]

Formes indéterminées.

$$\infty-\infty\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ \frac{0}{0}\ ;\ 0\cdot\infty\ ;\ \underbrace{0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0}_{\text{plus tard}}$$

Ex.

$$\lim_{x\to\infty}\big(\overbrace{\sqrt{x^2+2x}}^{\infty}\ \overbrace{-x}^{-\infty}\big)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{=|x|,\ x\to+\infty\ \Rightarrow\ x=|x|,\ x>0}\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\Big(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{2}{x}}_{\to 0}}+1\Big)}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\big(\overbrace{\sqrt{x^2+2x}}^{\infty}\ \overbrace{+x}^{-\infty}\big)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{=|x|=-x,\ x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\cancel{x}}{-\cancel{x}\Big(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{2}{x}}_{\to 0}}+1\Big)}=-1$$

Exercice: calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)$ par le changement de variable $y=-x$

Question 14.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{\cos(2\sin x)-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+4} = 2$$

A. vaut $-\frac{1}{8}$

B. vaut $\frac{1}{16}$

C. vaut $-\frac{1}{4}$

D. vaut 0

E. vaut $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{\cos(2\sin(x))-1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= 1-2\sin^2\alpha$$

$$\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{\sqrt{x^2+4}-2}\cdot\frac{x^2+4-4}{\sqrt{x^2+4}+2}\cdot\frac{1}{1-2\sin^2(\sin x)-1} =$$

$$= \underbrace{\frac{\sin\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)}{\sqrt{x^2+4}-2}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}+2}}_{\to \frac{1}{4}}\cdot\underbrace{\frac{(\sin x)^2}{-2\sin^2(\sin x)}}_{\to -\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{(\sin(x))^2}}_{\to 1} \longrightarrow -\frac{1}{8}$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{8}$$