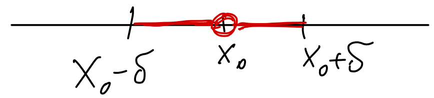
Limite d'une fonction

Déf Une fonction $f : E \to F$ est définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\} \subset E$

Remarque f n'est pas forcement définie en x_0.

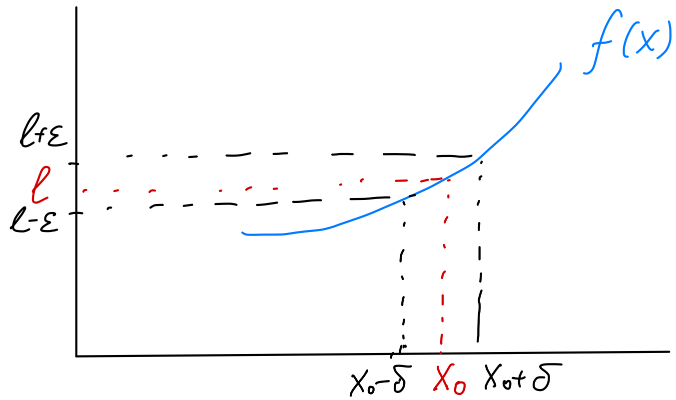


Ex. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ est définie au voisinage de $x_0 = 0$, mais pas en $x_0 = 0$

Déf. Une fonction $f : E \to F$ définie au voisinage de x_0 admet pour limite le nombre réel ℓ lorsque x tend vers x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$: $0 < |x - x_0| \leq \delta$ on a $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$.

Notation: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x δ-proche de x_0 (sauf peut-être $x = x_0$) on a $f(x)$ ε-proche de ℓ.



Ex. $f(x) = 3x - 1$ $x_0 = 1$ On va démontrer que $\lim\limits_{x \to 1} (3x-1) = 2$

Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $\delta > 0$ tel que si $0 < |x-1| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - 2| \leq \varepsilon$.

$|f(x)-2| = |3x-1-2| = |3x-3| = 3\underbrace{|x-1|}_{\text{on peut contrôler avec } \delta} \leq \varepsilon$ on veut $\Rightarrow$ Si $\delta = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$

$\forall x : |x-1| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ on a $|3x-3| = |f(x)-2| \leq 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a trouvé $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ tel que $\forall x : 0 < |x-1| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-2| \leq \varepsilon$

Alors par la définition de la limite $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

Ex. $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ $\forall x_0 > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. on cherche $\delta > 0$: $0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon$

$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right|$; puisque $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \right| \leq \left| \frac{\overbrace{x - x_0}^{\leq \delta}}{\sqrt{x_0}} \right| \leq \varepsilon$ on veut

Si on pose $\delta = \varepsilon \sqrt{x_0} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \left| \frac{x - x_0}{\sqrt{x_0}} \right| \leq \frac{\varepsilon \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0}} = \varepsilon$

$|x - x_0| \leq \delta = \varepsilon \sqrt{x_0}$

Si $|x - x_0| \leq \delta = \varepsilon \sqrt{x_0} \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$

Proposition Caractérisation de la limite d'une fonction à partir des suites

Soit $f : E \to F$ $\quad \underbrace{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}_{P} \iff$ Pour toute suite $(a_n) \subset \{x \in E, x \neq x_0\}$ telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, on a $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. $\quad Q$

Dém: $P \Rightarrow Q$. $\quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Soit $(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$, $a_n \in \{E \setminus \{x_0\}\} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - x_0| \leq \delta$ le même δ

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow |f(a_n) - \ell| \leq \varepsilon \overset{(\text{déf})}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$

$Q \Rightarrow P$. par contraposée. $\neg P \Rightarrow \neg Q$

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x : 0 < |x - x_0| \leq \delta$ et $|f(x) - \ell| > \varepsilon$ (négation de P)

On va construire une suite $(a_n) : \lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, mais $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \ell$ (négation de Q)

$\to \exists \varepsilon > 0$ fixé Soit $\delta = 1 \Rightarrow \exists a_1 \in E : 0 < |a_1 - x_0| \leq 1$ et $|f(a_1) - \ell| > \varepsilon$

$\delta = \frac{1}{2} \Rightarrow \exists a_2 \in E : 0 < |a_2 - x_0| \leq \frac{1}{2}$ et $|f(a_2) - \ell| > \varepsilon$

$\vdots$

$\delta = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \exists a_n \in E : 0 < |a_n - x_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ et $|f(a_n) - \ell| > \varepsilon$

$\Rightarrow$ la suite $(a_n) : 0 < |a_n - x_0| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - x_0| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = x_0$

mais $|f(a_n) - \ell| > \varepsilon \; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \ell \Rightarrow \neg Q$ $\quad \blacksquare$

Remarque. Il est important d'avoir la propriété Q pour toute suite convergente vers x_0.

Ex. $f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^* \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas, mais $\lim \frac{1}{n} = 0$

$\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1$

Corollaire. Soit $f: E \to F$ définie au voisinage x_0.
Supposons que pour toute suite $(a_n) \in E \setminus \{x_0\}$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, la suite $(f(a_n))$ converge. Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe.

Idée: Deux suites (a_n) et (b_n) : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$, et $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$

Supposons.

Soit $\begin{cases} c_{2n} = a_{2n} \\ c_{2n+1} = b_{2n+1} \end{cases}$ $\forall n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} c_n = x_0$; $\lim f(c_{2n}) = \lim f(a_{2n}) = \ell_1$

$\neq$

$\lim f(c_{2n+1}) = \lim f(b_{2n+1}) = \ell_2$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(c_n)$ n'existe pas $\Rightarrow$ contradiction

$\Rightarrow$ Alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) \overset{\text{caractérisation}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe

$\blacksquare$

Ex. $f(x) = x^p$, $p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} x^p = x_0^p \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$.

Soit $(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$ une suite arbitraire convergente vers x_0, $x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Soit $a_n = x_n - x_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} (x_n - x_0) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_0 + a_n) = \lim_{n\to\infty} (x_0 + a_n)^p = \lim_{n\to\infty} \Big(x_0^p + \underbrace{\binom{p}{1} x_0^{p-1} \underbrace{a_n}_{\to 0} + \binom{p}{2} x_0^{p-2} \underbrace{a_n^2}_{\to 0} + \dots \binom{p}{p} \underbrace{a_n^p}_{\to 0}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}\Big) = x_0^p$$

$\Rightarrow$ par la caractérisation

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} x^p = x_0^p}$$

Proposition. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell_2$, alors $\ell_1 = \ell_2$

(unicité de la limite)

Dém: pour les suites (a_n) convergentes vers x_0, on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell_1$,
et $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = \ell_2 \Rightarrow$ par l'unicité de la limite d'une suite
on a $\ell_1 = \ell_2$

Proposition. Critère de Cauchy pour les fonctions

$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 : \forall x_1, x_2 \in \{x\in E : 0 < |x-x_0| \leq \delta\}$ on a
$|f(x_1)-f(x_2)| \leq \varepsilon$

Voir DZ § 5.28.

$\Rightarrow$ directe Δ

$\Leftarrow$ caractérisation à partir des suites

Proposition Opérations algébriques sur les limites

$f: E \to \mathbb{R}$, $g: E \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R}$.

Alors: (1) $\lim_{x\to x_0} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$

(2) $\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$

(3) $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ si $\ell_2 \neq 0$, $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0.

Dém: par la caractérisation à partir des suites.

$\Rightarrow$ Pour tout polynôme et toute fonction rationnelle, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ sauf les zéros du dénominateur de $f(x)$.

(Puisque on a démontré $\lim_{x \to x_0} x^p = x_0^p$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$; $\forall x_0 \in \mathbb{R}$; opérations algébriques $\Rightarrow$ on obtient les limites des fonctions rationnelles.)

Ex. $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^5 - 3x^3 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 - 6x} = -\dfrac{2}{3}$.

Théorème des 2 gendarmes pour les fonctions.

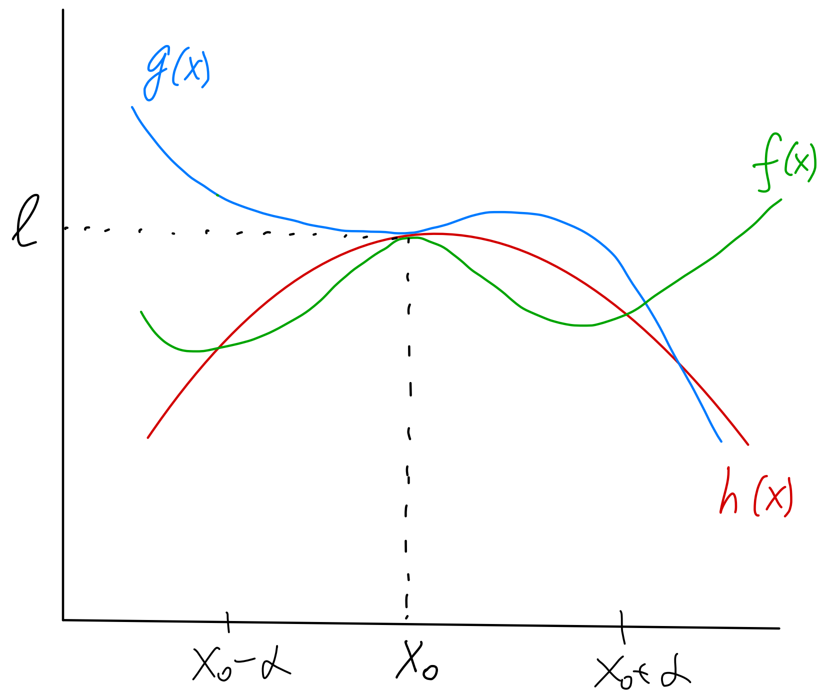
Soient $f, g, h : E \to F$ telles que

(1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

(2) $\exists \alpha > 0 : \forall x \in \{x \in E : 0 < |x - x_0| \leq \alpha\}$

on a $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

$\Rightarrow$ Alors $\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$



Dém: Soit $(a_n) \in \{x \in E \setminus \{x_0\}\}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$

$\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \forall n \geq m \Rightarrow |a_n - x_0| \leq \alpha$ le même α que dans les conditions

$$f(a_n) \leq h(a_n) \leq g(a_n) \quad \forall n \geq m$$

Puisque $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ on a par la caractérisation

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = \ell$$

$\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes pour les suites

$$\underset{\downarrow}{f(a_n)} \leq \underset{\downarrow}{h(a_n)} \leq \underset{\downarrow}{g(a_n)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} h(a_n) = \ell$$

$$\ell \qquad\qquad \ell \qquad\qquad \ell$$

$\Rightarrow$ Par la caractérisation à partir des suites $\lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$ $\blacksquare$

Ex. 1 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

Alors $\lim_{x \to 0} \sqrt{1+g(x)} = 1$.

Astuce: $\boxed{\text{Si } t \geq -1 \Rightarrow 1-|t| \leq \sqrt{1+t} \leq |1+\frac{1}{2}t|}$

(1) $\sqrt{1+t} \leq \sqrt{1+t+\frac{t^2}{4}} = \sqrt{(1+\frac{t}{2})^2} = |1+\frac{1}{2}t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(2) $t \geq 0 \Rightarrow 1-|t| = 1-t \leq 1 \leq \sqrt{1+t}$

$-1 < t < 0 \Rightarrow 1-|t| = \underbrace{1+t}_{\substack{\vee \\ 0}} \leq \sqrt{1+t} \Leftrightarrow 1+2t+t^2 \leq 1+t \Leftrightarrow \underbrace{t}_{<0}\underbrace{(1+t)}_{\geq 0} \leq 0$

$\Rightarrow 1-|t| \leq \sqrt{1+t} \quad \forall t : t \geq -1$

Puisque $\lim_{x \to 0} g(x) = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 :$ si $|x| \leq \delta \Rightarrow |g(x)| \leq 1 \Rightarrow g(x) \geq -1$

$$\Rightarrow \underbrace{1-|g(x)|}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 1} \leq \sqrt{1+g(x)} \leq \underbrace{\left|1+\frac{1}{2}g(x)\right|}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 1}$$

$\Rightarrow$ Par les 2 gendarmes $\lim_{x \to 0} \sqrt{1+g(x)} = 1$.

Ex 2.

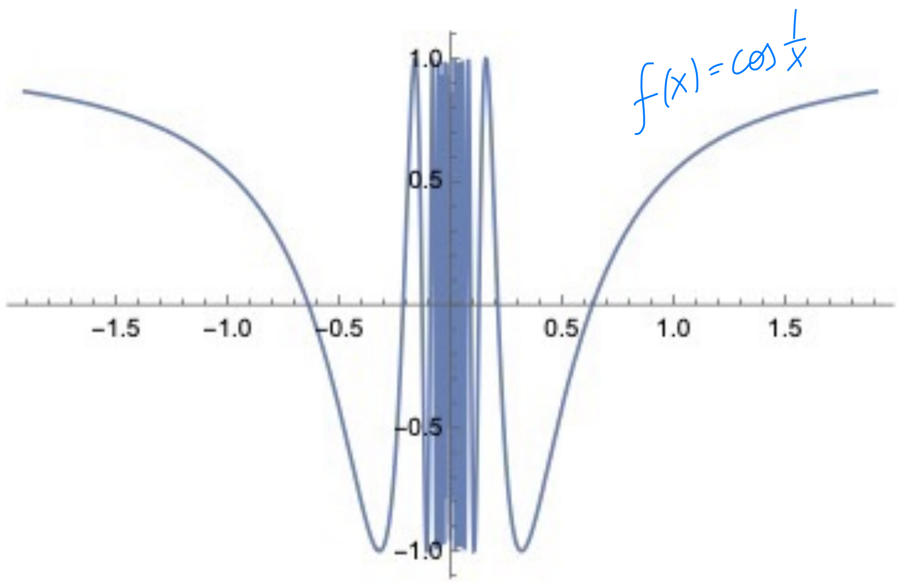
$$\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

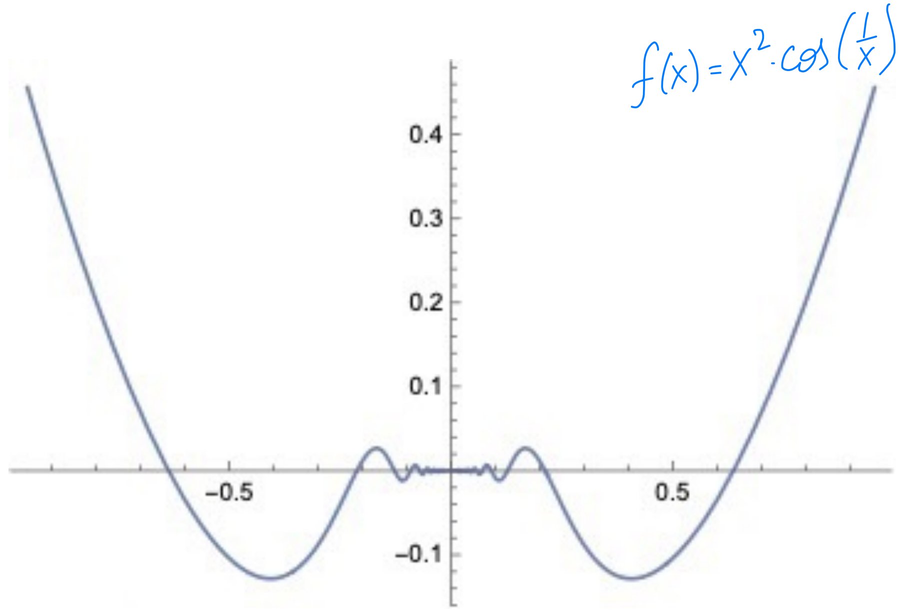
$f(x) = x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas définie en $x=0$, mais elle est définie au voisinage de $x=0$.

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \overset{x^2 > 0}{\Rightarrow} -x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

$$-x^2 \xrightarrow{x \to 0} 0 \qquad x^2 \xrightarrow{x \to 0} 0$$

$\Rightarrow$ par les 2 gendarmes $\lim_{x \to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$





Question 13

La limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\sin^2(\frac{1}{x})}+\sqrt{1-\sin^2(\frac{1}{x})}}$

A. vaut $\frac{1}{2}$

B. n'existe pas

C. vaut $\frac{1}{\sqrt{2}}$

D. vaut 0

E. vaut $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$x^2>0 \Rightarrow \quad 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq 1+\frac{1}{2}x^2$

$\downarrow \; 1 \qquad \downarrow \; 1 \qquad \downarrow \; 1 \qquad x\to 0$

$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x^2}=1$

$\sqrt{1+\sin^2(\frac{1}{x})}+\sqrt{1-\sin^2(\frac{1}{x})}$ fonctions oscillantes

Soit $a_k=\frac{1}{\pi k}$, $b_k=\frac{1}{\pi k+\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k=\lim\limits_{k\to\infty} b_k=0$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{1+\sin^2\left(\tfrac{1}{a_k}\right)}+\sqrt{1-\sin^2\left(\tfrac{1}{a_k}\right)}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{1+\underbrace{\sin^2(\pi k)}_{=0}}+\sqrt{1-\underbrace{\sin^2(\pi k)}_{=0\ \forall k}}\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}(1+1)=2$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{1+\sin^2\left(\tfrac{1}{b_k}\right)}+\sqrt{1-\sin^2\left(\tfrac{1}{b_k}\right)}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{1+\underbrace{\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}+\pi k\right)}_{=1}}+\sqrt{1-\underbrace{\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}+\pi k\right)}_{=1}}\right)=$$

$$=\lim_{k\to\infty}(\sqrt{2}+0)=\sqrt{2}$$

$\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{1+a_k^2}=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{1+b_k^2}=1$

puisque $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x^2}=1$.

$\Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k)=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(b_k)=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ par la caractérisation à partir des suites,

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas.