Test blanc le lundi 10 novembre pendant le cours, CE 6.

Inscription obligatoire : lien sur Moodle, avant 17:00 le 2 novembre.

Merci de vous inscrire une fois avec votre numéro SCIPER.

Pour acceder le formulaire enregistrez-vous avec votre adresse ****@epfl.ch

Test blanc : 8 QCM + 5 VF 60 min

Sujets : cours 1-15, semaines 1-8.

Materiel : stylo à encre noir ou bleu foncée, crayon, gomme, correcteur blanc feuilles de brouillon

Aucun document ni outil éléctronique n'est autorisé.

Le test ne compte pas pour la note finale.

Chapitre 4. Fonctions réelles.

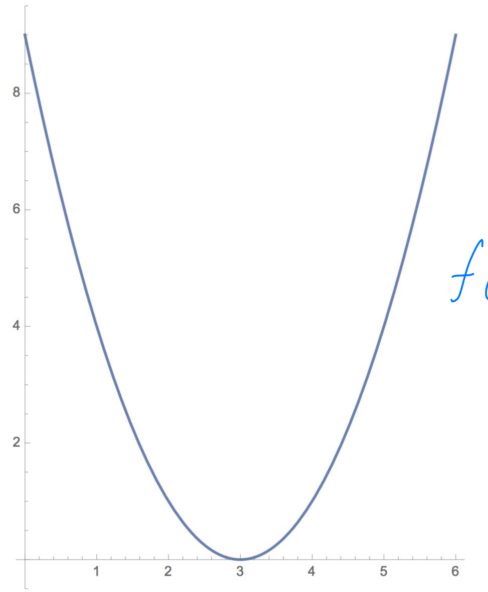
§4.1. Définitions et propriétés de base.

Déf Une fonction $f: E \to F$, où $E, F \subset \mathbb{R}$ est une application qui donne pour tout élément $x \in D(f) = E$ un élément $y = f(x) \in F$

$D(f)$ - domaine de définition $(=E)$

$f(D)$ - ensemble image $\subset F$ l'ensemble d'arrivée

Notation $x \to f(x)$



$f(x) = (x-3)^2$

Déf Le graphique de $f: E \to F$ est l'ensemble des points sur le plan $\mathbb{R}^2$ avec les coordonnées $(x, f(x))$

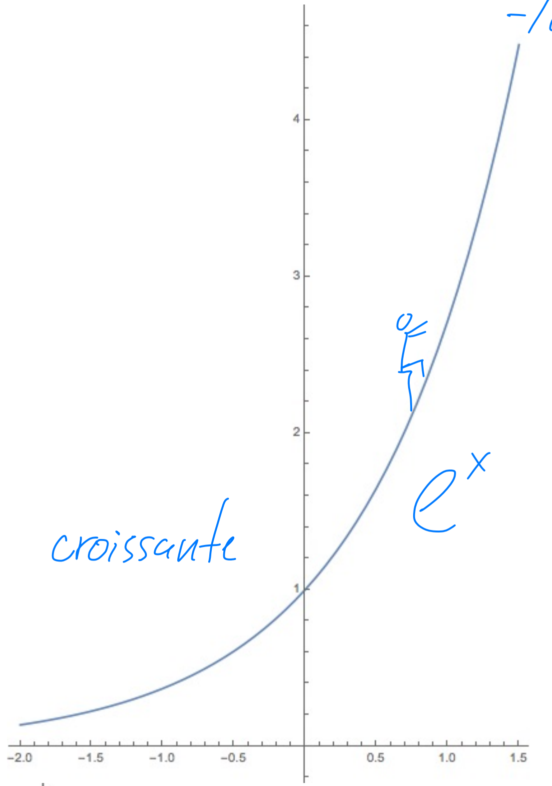
Remarque Si la fonction est donnée par une formule, alors $D(f)$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où l'expression $f(x)$ est bien définie

Propriétés de base.

(1) f est (strictement) croissante sur $D(f)$ si

$$\forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{array}{l} f(x_1) \leq f(x_2) \\ f(x_1) < f(x_2) \end{array}$$

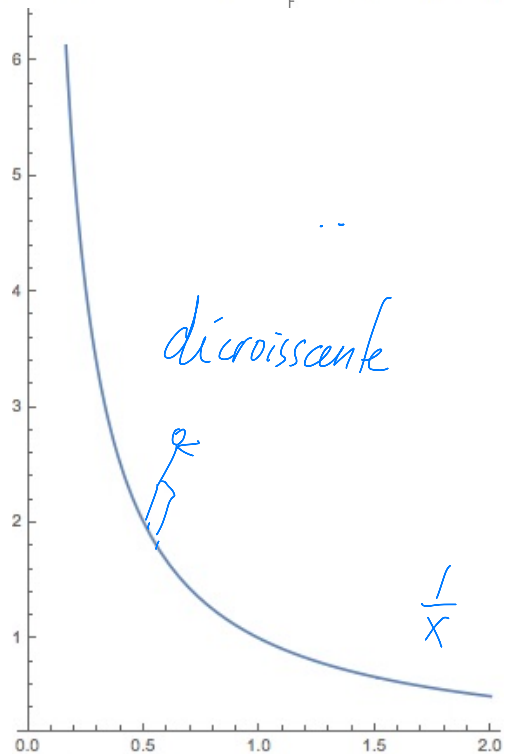
Notation f croissante : $f(x)\uparrow$



(2) f est (strictement) décroissante sur $D(f)$ si

$$\forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{array}{l} f(x_1) \geq f(x_2) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array}$$

Notation f décroissante : $f(x)\downarrow$

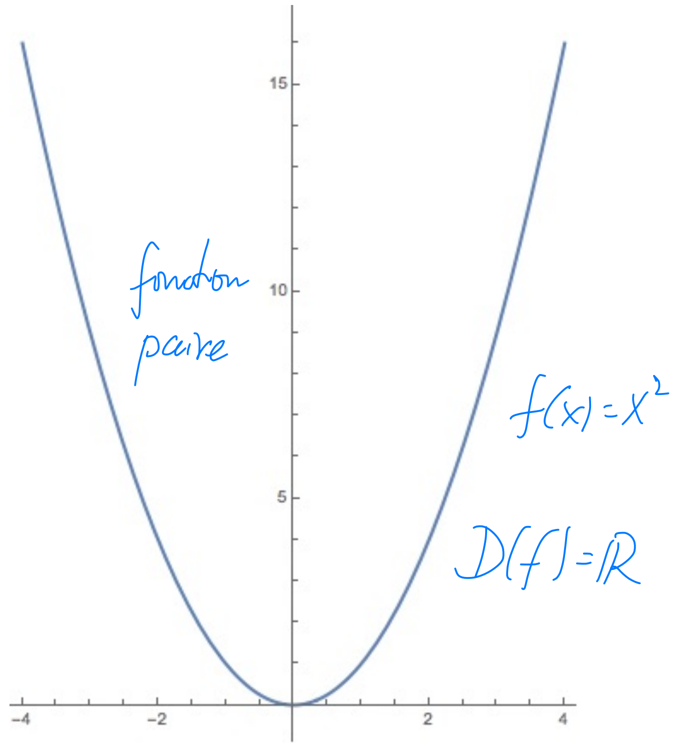


(3) Si f est (strictement) croissante sur $D(f)$ ou (strictement) décroissante sur $D(f)$, alors elle est (strictement) monotone sur $D(f)$

(4) f est <u>paire</u> si

$D(f)$ est symétrique : $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$

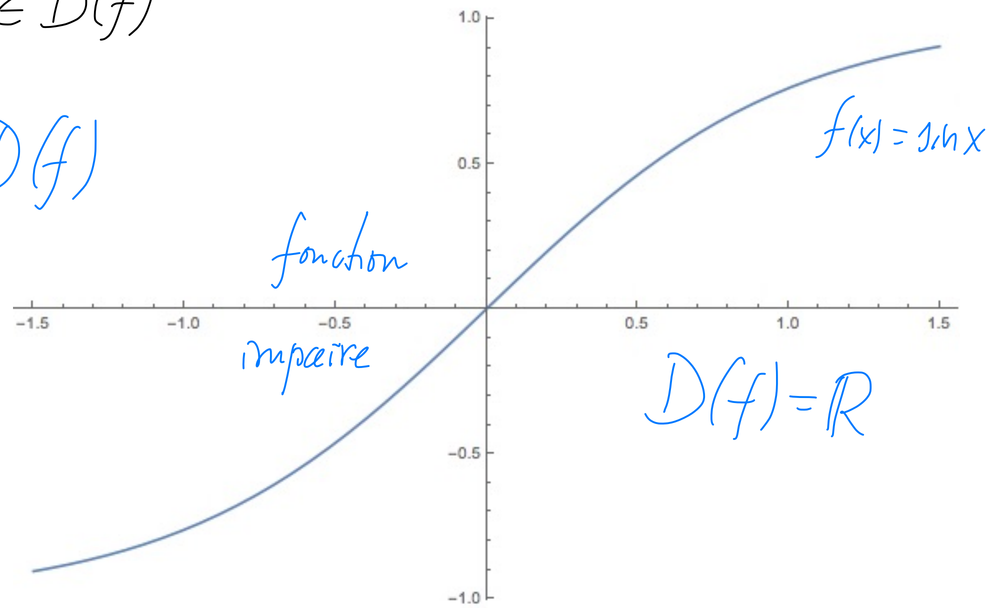
et $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D(f)$



(5) f est <u>impaire</u> si

$D(f)$ est symétrique : $x \in D(f) \Rightarrow -x \in D(f)$

et $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D(f)$



(6) $f : E \to F$ est <u>périodique</u> s'il existe $P \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall x \in E \Rightarrow x \pm P \in E$ et $f(x \pm P) = f(x)$ $\forall x \in E$.

P s'appelle une période de f. Alors $\{nP, n \in \mathbb{Z}^*\}$ sont des périodes.

Si f est périodique $\Rightarrow x \in E \Rightarrow x + nP \in E$ $\forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow E$ n'est pas borné.

Souvent il est possible de trouver la plus petite période : $P > 0$ tel que $\{nP, n \in \mathbb{Z}^*\}$ contient l'ensemble de toutes les périodes de f.

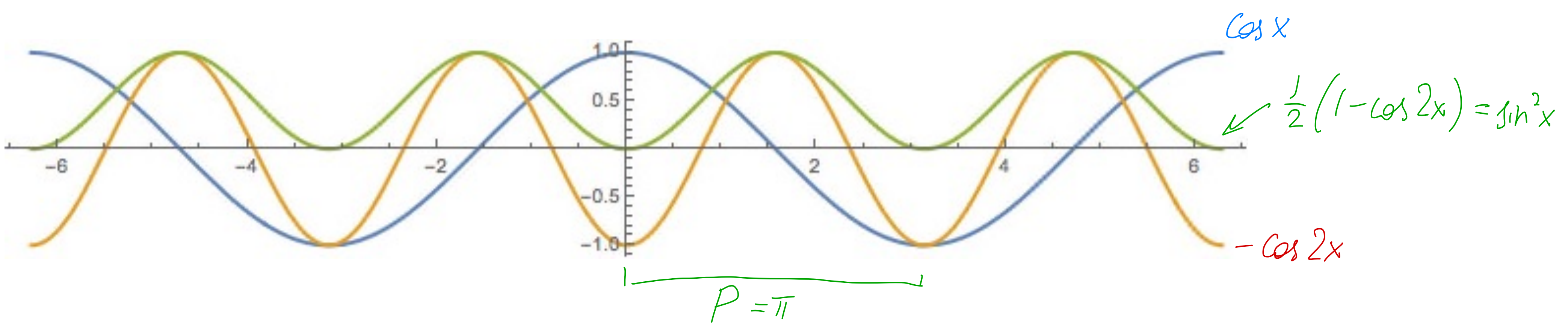
<u>Ex.</u> $f(x) = \sin^2 x$, $x \in \mathbb{R}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 - \sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$\cos x$ est 2π-périodique $\Rightarrow \cos(2x)$ est π-périodique

la plus petite période de $\sin^2 x$ est π



Ex. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ $D(f) = \mathbb{R}$

$$\underset{x}{\text{rationnel}} + \overset{\text{rationnel}}{P} = x+P$$

$$\begin{cases} \text{rationnel} + P = \text{rationnel} \\ \text{irrationnel} + P = \text{irrationnel} \end{cases}$$

$$x + \underset{\text{rationnel}}{P} = x + P$$

Par exemple $P = 1$ est une période

Si $x+P$ rationnel $\Rightarrow x = x+P-P$ aussi rationnel

$\Rightarrow$ Si x irrationnel et P rationnel $\Rightarrow x+P$ irrationnel.

$\Rightarrow \forall P \in \mathbb{Q}^*$, P est une période de f : $f(x+P) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. La fonction n'admet pas la plus petite période.

(7) $f : E \to F$ est majorée (minorée) sur $A \subset E$ si l'ensemble

$f(A) \subset \mathbb{R}$ est majoré (minoré).

Si $f(x)$ est à la fois minorée et majorée sur A, alors elle est bornée sur A.

$\Longleftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ : |f(x)|_{x \in A} \leq M$.

(8) Borne supérieure $\sup\limits_{x \in A} f(x) \overset{\text{déf}}{=} \sup\{f(x), x \in A\}$

Borne inférieure $\inf\limits_{x \in A} f(x) \overset{\text{déf}}{=} \inf\{f(x), x \in A\}$

Ex. $f : \underbrace{]0,1[}_{A} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3 \Rightarrow f(x)$ est bornée sur A

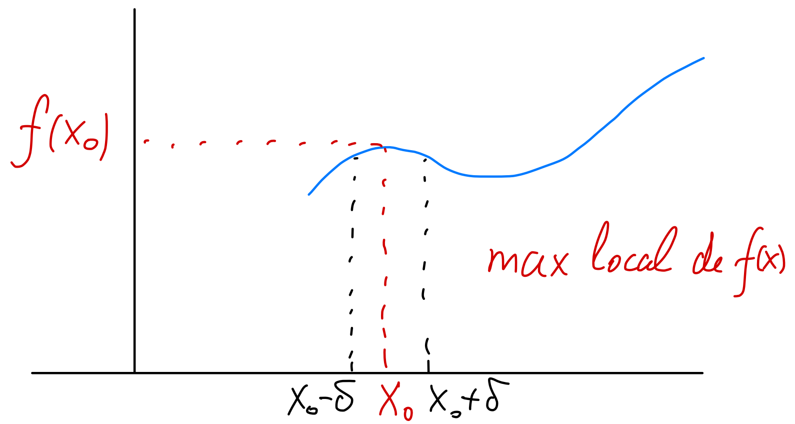
$$\sup\limits_{x \in A} f(x) = \sup\{x^2+3, x \in]0,1[\} = 4 \notin f(A) \qquad \inf\limits_{x \in A} f(x) = \inf\{x^2+3, x \in]0,1[\} = 3 \notin f(A)$$

(9) Maximum et minimum local d'une fonction.

$f: E \to F$, $x_0 \in E$. Alors f admet un max (min) local au point x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in D(f)$ et tels que $|x - x_0| \leq \delta$,

on a $f(x) \leq f(x_0)$ (max loc)

$f(x) \geq f(x_0)$ (min loc)



(10) Maximum et minimum global d'une fonction

Soit $f: E \to F$ et M $(m) \in \{f(x), x \in E\} = f(E)$, tel que

$\forall x \in E$ on a $f(x) \leq M$ $(f(x) \geq m)$

Donc $\exists x_0 \in E$: $f(x_0) = M$ (ou $f(x_0) = m$)

Alors M est le maximum global (m est le minimum global) de f sur E

Si $f(x_0) = M$

$f(x_0) = m$ $\Rightarrow$ on dit que la fonction atteint son $\frac{\text{max}}{\text{min}}$ global sur E au point x_0

Remarque. (1) Si $\max_{x\in E} f(x)$ $\left(\min_{x\in E} f(x)\right)$ existe $\Rightarrow$

f est majorée (minorée) sur E et $\sup_{x\in E} f(x) = \max f(x)$ $\left(\inf_{x\in E} f(x) = \min_{x\in E} f(x)\right)$

(2) Une fonction bornée sur E n'atteint pas forcement son min ou max sur E

Ex $f(x) = x^2+3$ sur $E =]0,1[$ est bornée, mais elle n'atteint ni son min ni son max

$f(x) = x^2+3$ sur $[0,1[$ atteint son min au point 0 : $f(0) = 3 = \min_{[0,1[} f = \inf_{[0,1[} f$

(11) Fonction $f : E \to F$ est surjective

Si $\forall y \in F$ il existe au moins un $x \in E$ tel que $f(x) = y$

(12) Fonction $f : E \to F$ est injective

Si $\forall y \in F$ il existe au plus un $x \in E$ tel que $f(x) = y$

$(\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)\,,\ x_1, x_2 \in E \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Remarque Si $f : E \to F$ n'est pas injective $\Rightarrow$ il faut reduire l'ensemble de depart E

Si $f : E \to F$ n'est pas surjective $\Rightarrow$ il faut reduire l'ensemble d'arrivée F.

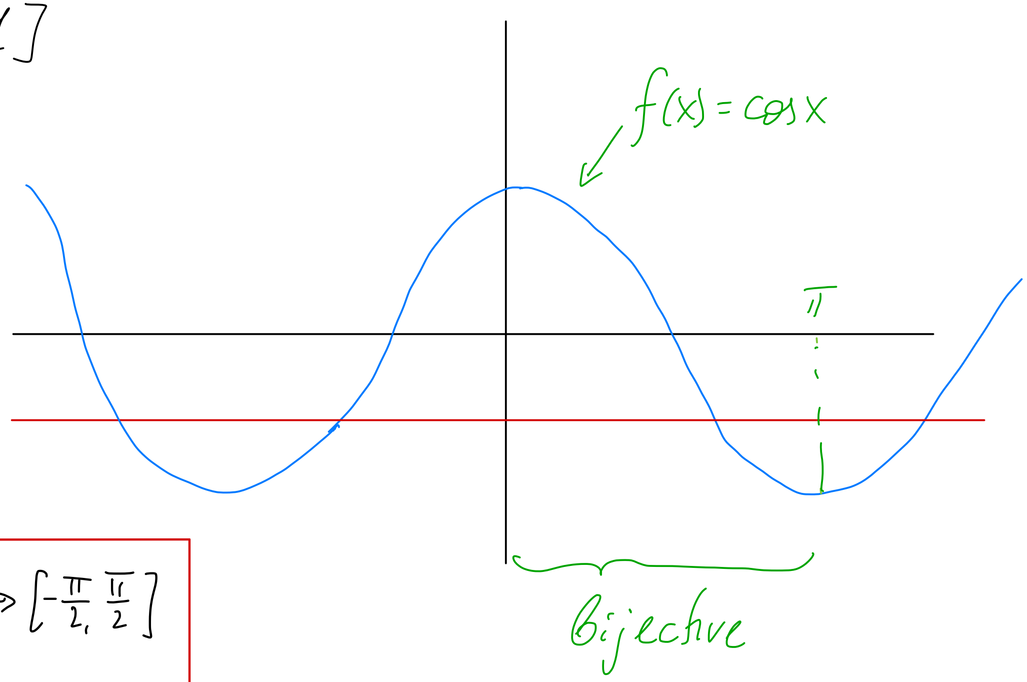
(13) Si $f : E \to F$ est à la fois injective et surjective, alors elle est bijective.

$\forall y \in F$ il existe exactement un $x \in E$: $f(x) = y$.

(14) Si $f : E \to F$ est bijective, on peut définir la fonction réciproque par la formule $\boxed{y = f(x),\ x \in E \iff x = f^{-1}(y),\ y \in F}$

Ex. $f(x) = \cos x : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ n'est pas injective

Elle est bijective sur $[0, \pi] \to [-1, 1]$



Par convention on choisit les domaines suivants pour définir les fonctions trigonométriques réciproques:

$\sin x : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \rightsquigarrow \arcsin x : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1] \rightsquigarrow \arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$\tan x :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \rightsquigarrow \arctan x : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

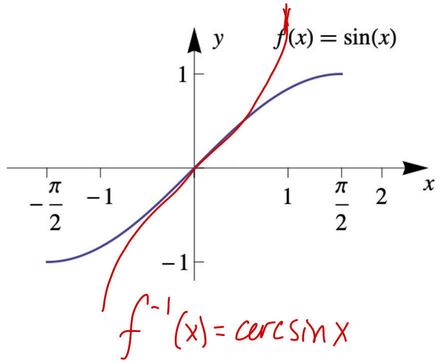
$\cot x :]0, \pi[\to \mathbb{R} \rightsquigarrow \operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \to]0, \pi[$

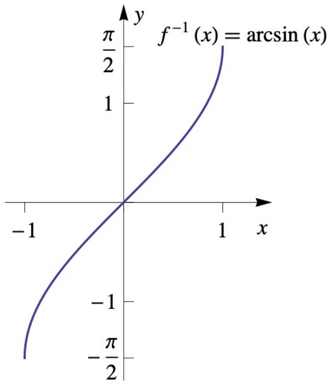
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

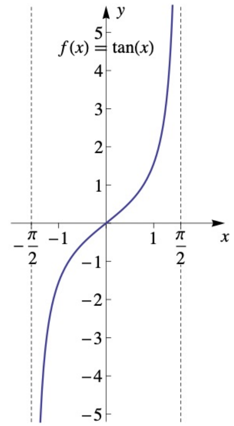
Fonctions trigonométriques et leur fonctions réciproques.

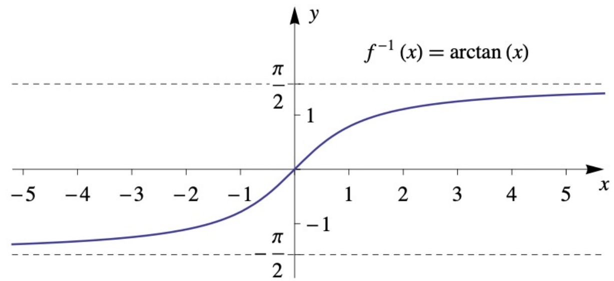
a) $f(x) = \sin x,\ D(f) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
$f^{-1}(x) = \arcsin x, D(f^{-1}) = [-1, 1]$.





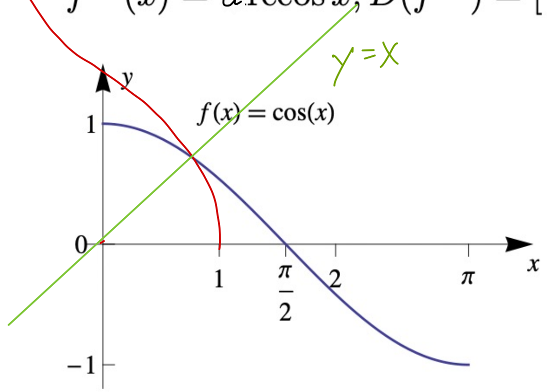
c) $f(x) = \tan x,\ D(f) =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
$f^{-1}(x) = \arctan x, D(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

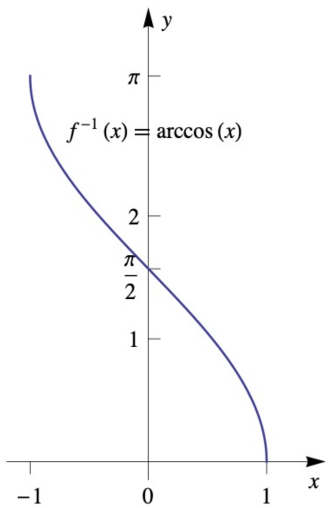


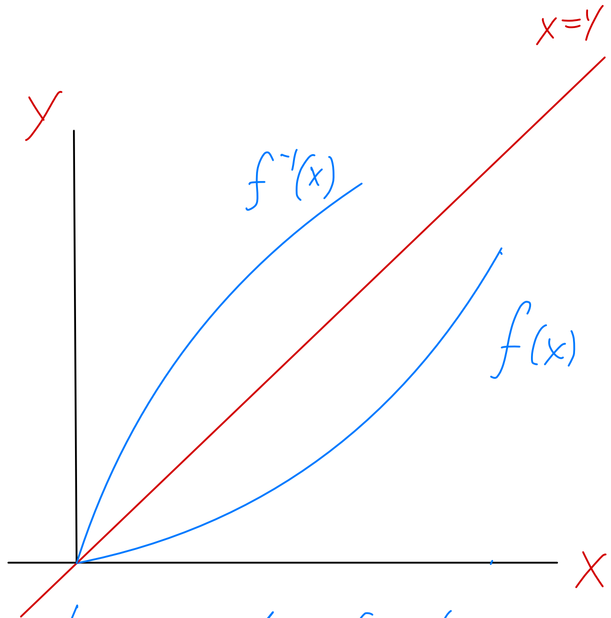


$f^{-1}(x) = \arccos x$

b) $f(x) = \cos x,\ D(f) = [0, \pi]$.
$f^{-1}(x) = \arccos x, D(f^{-1}) = [-1, 1]$.







Les graphiques des fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

(15) Composition des fonctions. Soit $f: E \to F$ et $g: G \to H$, $E, F, G, H \subset \mathbb{R}$

Supposons $f(E) \subset G$ => On définit la fonction composée

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \; : \; E \to H$$

Supposons $g(G) \subset E$ => On définit la fonction composée

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \; : \; G \to F.$$

Ex. $f(x) = \cos x \; : \; \mathbb{R} \to [-1, 1]$ et $g(x) = \sqrt{x^2+3} \; : \mathbb{R} \to [\sqrt{3}, +\infty[$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x^2+3}) = \cos(\sqrt{x^2+3}) \; : \; \mathbb{R} \to [-1, 1]$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = \sqrt{\cos^2 x + 3} \; : \; \mathbb{R} \to [\sqrt{3}, 2]$$

Remarque Si $f: E \to F$ bijective => $\exists f^{-1}$ réciproque, $f^{-1}: F \to E$

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \qquad \forall x \in E, \; \forall y \in F$$

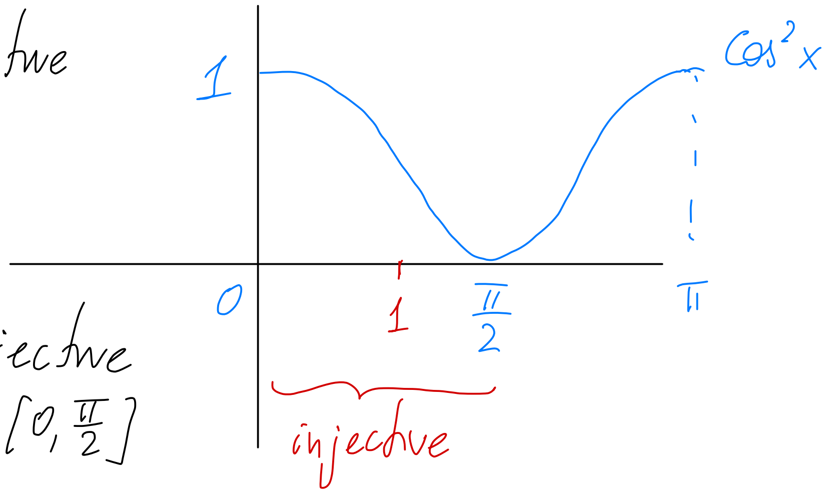
Alors $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \implies f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in E$

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \implies f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in F.$$

Ex. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)+1}$ Trouver le plus grand ensemble contenant $x=1$ où f est bijective, et donner une fonction réciproque et son domaine de définition.

f est définie sur $\mathbb{R}$, $D(f)=\mathbb{R}$, f est périodique, la plus petite période de f = la plus petite période de $\cos^2 x$, est π.

$\Rightarrow$ on considère $f(x)$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ où f est injective et $1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$.



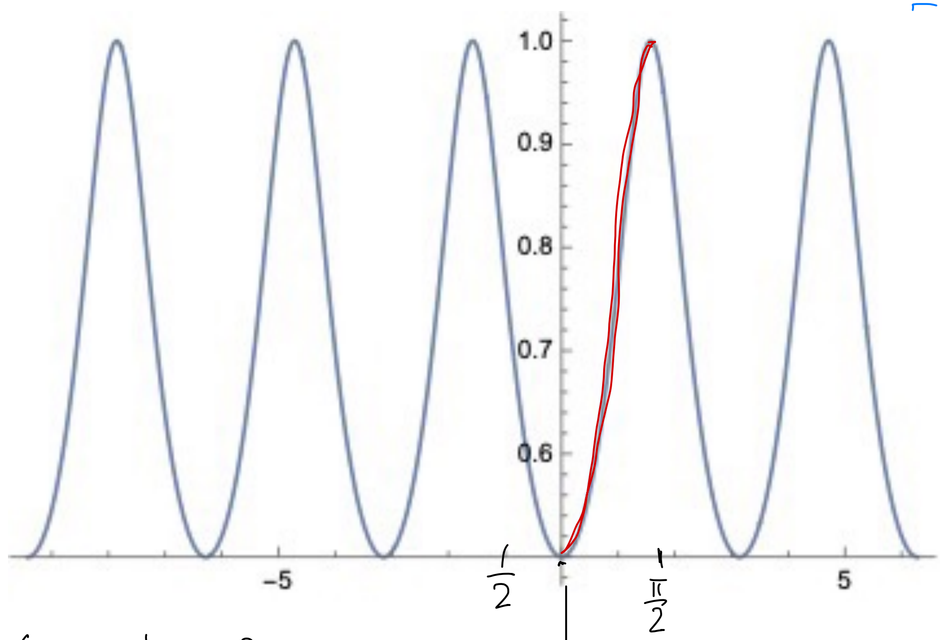
$\dfrac{1}{y+1}$ est injective partout sur son domaine

$\cos^2 x$ est injective sur $[0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \dfrac{1}{\cos^2 x+1}$ est injective sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ On considère $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x+1}$; $f : [0, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow[\text{injective}]{} \mathbb{R}$

Il nous faut trouver l'ensemble des valeurs $f([0, \frac{\pi}{2}])$

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 1} \qquad x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right]$$



$\cos x : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ decroissante

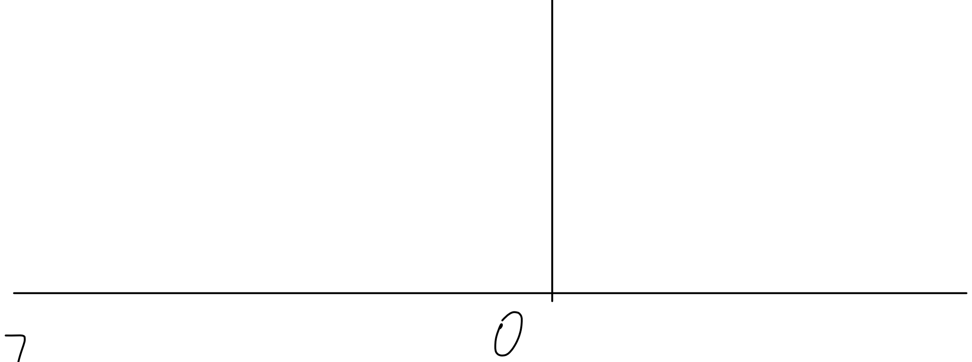
$\cos^2 x : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ decroissante

$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x + 1} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ croissante

$\Rightarrow$ trouver

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{\cos^2 0 + 1} = \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{2} + 1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ Bijective



$\Rightarrow$ il existe $f^{-1} : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Calculer la fonction réciproque :

$$y = \frac{1}{\cos^2 x + 1}, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$y(\cos^2 x + 1) = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{y} - 1$$

$y \neq 0 \quad y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$\cos x = + \sqrt{\frac{1}{y} - 1}$$

parce que $\cos x > 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

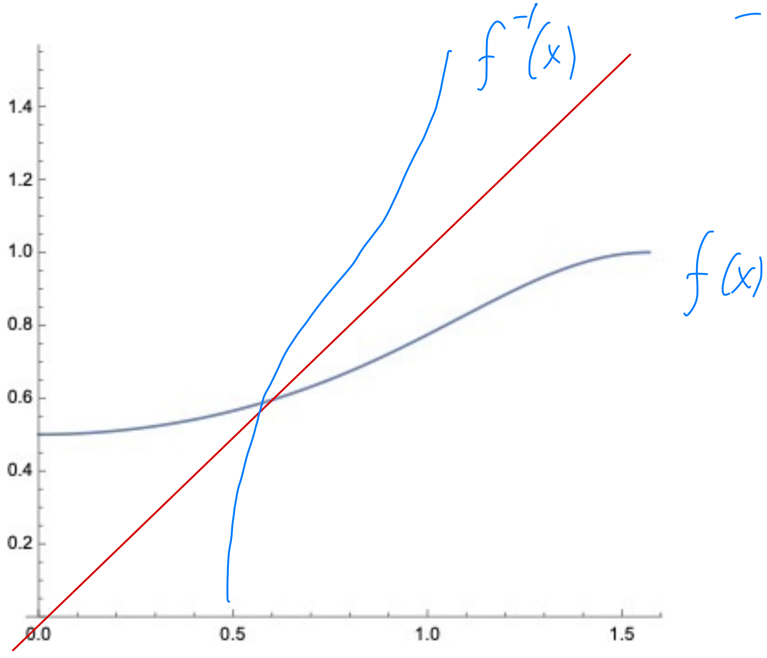
$$\Rightarrow x = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{y} - 1}\right)$$

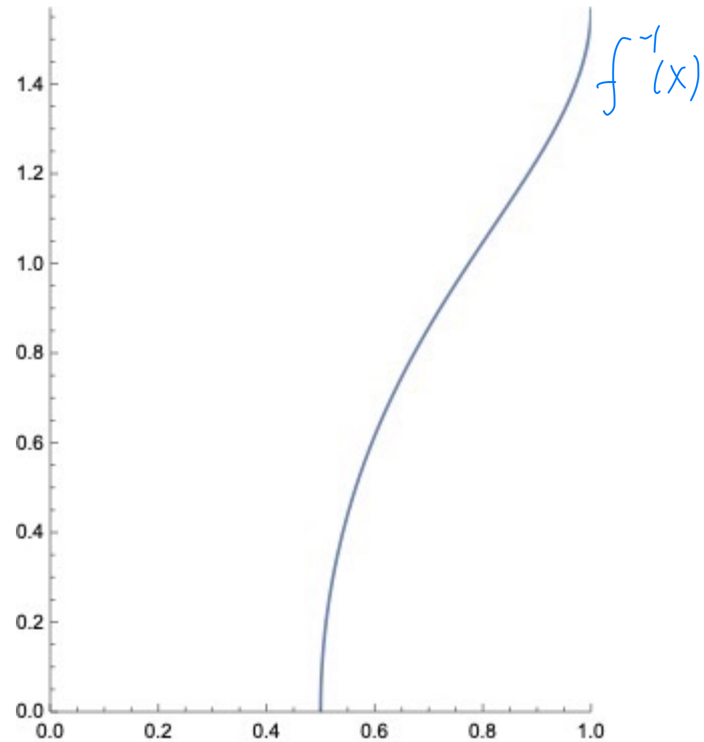
parce que $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \subset [0, \pi]$ ensemble d'image d'arccos

Finalement, $f^{-1}(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right)$

$$f^{-1} : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

bijective





Question 12 Soit $f(x) = 2\sin(1-x^2)$ sur le plus grand intervalle où la fonction est bijective et qui contient $x=1$. Alors le domaine de définition et l'ensemble image de sa fonction réciproque f^{-1} sont :

A. $f^{-1} : [-2\sin 1, 2\sin 1] \to \left[\sqrt{1-\frac{\pi}{2}}, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right]$

B. $f^{-1} : [0, 2\sin 1] \to [0, \sqrt{1+\pi}]$

C. $f^{-1} : [-2, 2\sin 1] \to \left[0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right]$

D. $f^{-1} : [-2, 2\sin 1] \to \left[-\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right]$

E. $f^{-1} : [-2\sin 1, 0] \to [0, \sqrt{1+\pi}]$

$$f(x) = 2\sin(1-x^2)$$

$$y = 2\sin(1-x^2) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le 1 - x^2 \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \Rightarrow -1-\frac{\pi}{2} \le -x^2 \le -1+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 1+\frac{\pi}{2} \ge \underbrace{x^2}_{\ge 0} \ge \underbrace{1-\frac{\pi}{2}}_{<0}$$

$x=1$ est dans l'intervalle $\Rightarrow k=0$

$$\Rightarrow x^2 \le 1+\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\sqrt{1+\frac{\pi}{2}} \le x \le \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$$, $x = 1 \in$ intervalle ; injective $\Rightarrow$

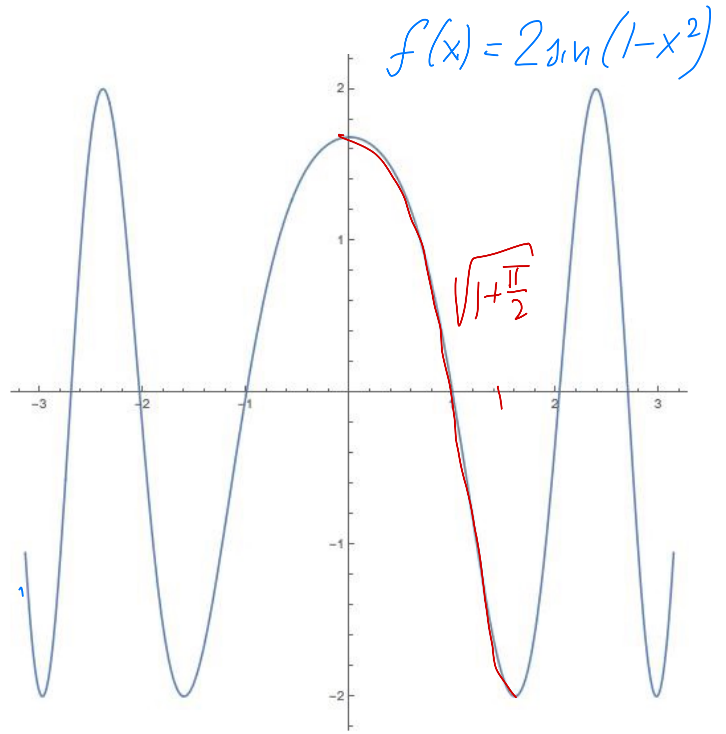
$$0 \le x \le \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$$

$\Rightarrow D(f) = \left[0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right]$ $\quad$ f est bijective

$\Rightarrow f$ est bijective sur $E = \left[0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right]$ $\quad$ $f \downarrow$

$$f(0) = 2\sin(1-0) = 2\sin 1$$

$$f\left(\sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right) = 2\sin\left(1-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$$



$$f : \left[0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right] \to [-2, 2\sin 1]$$

bijective

bijective

$\Rightarrow f : \left[0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right] \to [-2, 2\sin 1]$.

Calculer f^{-1} :

$$2\sin(1-x^2) = y \Rightarrow \sin(1-x^2) = \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 = \arcsin\frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$x^2 = 1 - \arcsin\frac{y}{2} \Rightarrow$$

$x = \sqrt{1-\arcsin\frac{y}{2}}$ puisque $0 \le x \le \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1-\arcsin\frac{y}{2}}.$$

$$f : \left[0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right] \to [-2, 2\sin 1]$$

$$f^{-1} : [-2, 2\sin 1] \to \left[0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}\right]$$