

Rappel: Ex 1. Série géométrique: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \begin{cases} \frac{1}{1-r}, & |r| < 1 \\ \text{divergent}, & |r| \geq 1 \end{cases}$

Ex 2. Série harmonique: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente. cours 10

Ex La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente

Dém. $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2}\right) + \dots < 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^2} =$

$= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow S_n < 1 + \frac{1}{2} S_n \Rightarrow \frac{1}{2} S_n < 1 \Rightarrow S_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(S_n) \uparrow$ $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Alors $(S_n) \uparrow$ et majorée par 2

$\Rightarrow (S_n)$ est convergente \Rightarrow la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Remarques. (1) La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ est convergente pour tout $p > 1$ (Série 7) ⁻⁹⁶⁻

(2) ^{**} $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler ~1750) Voir "zeta.pdf" sur Moodle
↖ fonction z\u00eata de Riemann

(3) La fonction z\u00eata de Riemann: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, convergente $s > 1$.

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = C_k (\pi)^{2k}$, $C_k \in \mathbb{Q}$ $\zeta(2k)$ irrationnel $\forall k \in \mathbb{N}^*$ (Euler ~1750)

$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ est irrationnel (Apery ~1979)

Au moins une valeur entre $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11)$ est irrationnel

Hypoth\u00e8se $\zeta(k)$ sont irrationnels $\forall k \geq 2$ naturel (tr\u00e8s tr\u00e8s difficile)

Exercice ^{**} $\left(\prod_{p \text{ premier}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \right) \cdot \zeta(s) = 1 \quad \forall s \geq 2$ naturels.

Astuce: $\frac{1}{2^s} \zeta(s) = ?$ $\left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) = ?$ (Voir zeta.pdf sur Moodle)

Déf Convergence absolue. Une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ est convergente.

Proposition. Une série absolument convergente est convergente.

Dém: Soit $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$; $P_n = \sum_{k=0}^n |a_k|$. On sait que (P_n) converge.

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |P_m - P_n| \leq \epsilon$

$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| = |P_m - P_n| \leq \epsilon \Rightarrow (S_n)$ est une suite de Cauchy
inégalité triangulaire
 $\Rightarrow (S_n)$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ▣

Proposition (Condition nécessaire)

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Dém: $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ est une suite de Cauchy $\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} :$

$\forall m, n \geq n_0 \Rightarrow |S_m - S_n| \leq \epsilon$, en particulier

$|S_{n+1} - S_n| \leq \epsilon$

\parallel
 $|a_{n+1}| \leq \epsilon \stackrel{\text{dét}}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. ▣

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$ $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2}$ n'existe pas \Rightarrow la condition nécessaire n'est pas satisfaisante \Rightarrow la série diverge -98-

Remarque. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ n'implique pas la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Ex: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

§3.2. Critères de convergence.

Proposition. Critère de Leibnitz pour les séries alternées.

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série telle que:

- $\left. \begin{array}{l} (1) \text{ il existe } p \in \mathbb{N}: \forall n \geq p \Rightarrow |a_{n+1}| \leq |a_n| \\ (2) \text{ il existe } q \in \mathbb{N}: \forall n \geq q \Rightarrow a_{n+1} \cdot a_n \leq 0 \text{ dit alternée} \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$

\Rightarrow Alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente

[DZ §4.2.3]

Ex. Série harmonique alternée : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ est convergente par le critère de Leibnitz.

(1) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$

(2) $\frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{1}{n+1} < 0; \quad \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} < 0$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge = $\ln 2$
(à voir plus tard)

Proposition Critère de comparaison (pour les séries à termes non-négatifs : $a_n \geq 0$)

Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $\exists k \in \mathbb{N} : 0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq k$

Alors : Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

Dém: (1) Soit $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$, $P_n = \sum_{i=0}^n b_i \Rightarrow 0 \leq a_i \leq b_i \quad \forall i \geq k$

$$\sum_{i=n+1}^m a_i \leq \sum_{i=n+1}^m b_i \quad \forall m > n \geq k$$

$$0 \leq S_m - S_n \leq P_m - P_n \quad \forall m > n \geq k$$

Si (P_n) est une suite de Cauchy $\Rightarrow (S_n)$ l'est aussi \Rightarrow Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

(2) Si (S_n) diverge, $(S_n) \uparrow \Rightarrow (S_n)$ n'est pas bornée $\Rightarrow \lim S_n = \infty$; $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq k$
 $\Rightarrow \lim P_n = \infty \Rightarrow \sum b_n$ diverge.

Ex. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$ Considérons $\sum \left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right|$ $|\cos x| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ convergente}$$

$\Rightarrow \sum \left| \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2} \right|$ est convergente par le critère de comparaison

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n!)}{(n+1)^2}$ est absolument convergente \Rightarrow convergente.

Remarque. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ possède que de termes ^{a_n} positifs (négatifs), et la suite des sommes partielles est ^{a_n} majorée (minorée), alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente.

Proposition. Critère de d'Alembert (pour les séries)

Soit (a_n) une suite : $a_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \in \mathbb{R}$

Alors si $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument

si $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

si $\rho = 1 \Rightarrow$ pas de conclusion ☹

Idée: comparaison avec une série géométrique (Voir Série 7).

Proposition Critère de Cauchy (de la racine).

généralisation:

Soit (a_n) une suite et $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \in \mathbb{R}$ ($\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)

Alors si $\rho < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument

si $\rho > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.

Iclée: comparaison avec une série géométrique (Voir Série 7).

Remarques.

(1) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \Rightarrow$ alors $r = l$.

(2) Parfois $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ n'existe pas (Voir exemple dans Série 7)

(3) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, alors pas de conclusion sur la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Ex. $\sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$ diverge, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$

Ex. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot n!}{(2n)!}$ Critère de d'Alembert : $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{10^{n+1} (n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{10^n \cdot n!} =$ -102-

$$= 10 \frac{(n+1)!}{n!} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{10 (n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{10 \cdot \cancel{(n+1)}}{(2n+1) \cdot 2 \cdot \cancel{(n+1)}} = \frac{5}{2n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5}{2n+1} \right| = 0 = \rho < 1 \Rightarrow \text{par le critère de d'Alembert}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n \cdot n!}{(2n)!} \text{ converge.}$$

(2) Série avec paramètre $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $x \in \mathbb{R}$ un paramètre

Par le critère de d'Alembert $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ converge absolument } \forall x \in \mathbb{R}$$

On verra plus tard que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Question 11

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha n}{4n+1}\right)^{2n}$

A $-4 < \alpha < 4$

B $-4 \leq \alpha \leq 4$

C $|\alpha| < 1$

D $-4 < \alpha \leq 4$

E $0 < \alpha < 1$

converge si et seulement si:

Critère de Cauchy: $\sqrt[n]{\left|\frac{\alpha n}{4n+1}\right|^{2n}} = \left|\frac{\alpha n}{4n+1}\right|^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{\alpha n}{4n+1}\right|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{\alpha}{4}\right|^2 \underbrace{\left|\frac{1}{1+\frac{1}{4n}}\right|^2}_{\rightarrow 0} = \left|\frac{\alpha}{4}\right|^2$$

$$\left|\frac{\alpha}{4}\right|^2 < 1 \Leftrightarrow -4 < \alpha < 4 \Rightarrow \text{conv. absolument.}$$

$$|\alpha| > 4 \Rightarrow \text{diverge.}$$

$$\alpha = 4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{2n}, \text{ Condition nécessaire: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{2n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{4n+1}{4n}\right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0 \Rightarrow \text{la série diverge}$$

$$\alpha = -4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-4n}{4n+1}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{4n+1}\right)^{2n} \text{ divergente}$$