

Sous-suites. Suites de Cauchy.

Déf Une sous-suite d'une suite (a_n) est une suite $k \rightarrow a_{n_k}$,
où $k \rightarrow n_k$ est une suite strictement croissante de nombres naturels.

Ex 1 $a_n = (-1)^n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \quad (a_{2k}) \subset (a_n) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 1$
 $a_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1 \quad (a_{2k+1}) \subset (a_n) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = -1$
 (a_n) est divergente

Proposition. (convergence d'une sous-suite).

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \Rightarrow$ toute sous-suite (a_{n_k}) converge aussi vers l .

Dém: Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon$

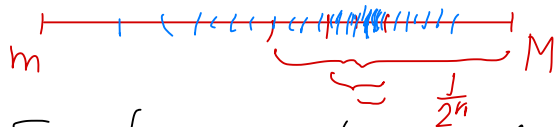
Donc $\forall k \geq n_0 \Rightarrow n_k \geq k \geq n_0 \Rightarrow |a_{n_k} - l| \leq \varepsilon \stackrel{\text{dit}}{\Leftrightarrow} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = l$

Théorème de Bolzano-Weierstrass. Dans toute suite bornée il existe
une sous-suite convergente.

Idée: $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq (a_n) \leq M \Rightarrow$ On divise l'intervalle $[m, M]$ par 2

On retient la moitié contenant un nombre ∞ d'éléments de (a_n)

Puis on recommence. La longueur des intervalles $= \frac{M-m}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$



En choisissant un élément dans chaque intervalle plus loin dans la suite, on obtient
une sous-suite convergente.

Suites de Cauchy

-87-

Déf La suite (a_n) est une suite de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ et $\forall m \geq n_0$ $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$.

Proposition. Une suite (a_n) est une suite de Cauchy ^{si et seulement si} $\Leftrightarrow (a_n)$ est convergente.

Idée: (\Rightarrow) (1) Une suite de Cauchy est bornée
(2) Bolzano-Weierstrass $\Rightarrow \exists$ une sous-suite convergente
(3) Cauchy + sous-suite convergente \Rightarrow la suite converge
(\Leftarrow) Inégalité triangulaire: $|a_p - a_q| \leq |a_p - l| + |l - a_q| \leq 2\varepsilon$

Voir [DZ, § 3.7.4]

-88-

Remarque. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ ^{fixé} n'implique pas que (a_n) est une suite de Cauchy

Ex. $a_n = \sqrt{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+k} - \sqrt{n})(\sqrt{n+k} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = 0$

Mais $a_n = \sqrt{n} \rightarrow \infty$ est divergente

$\Rightarrow (a_n)$ n'est pas une suite de Cauchy.

Explication Soit $k \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$. Alors $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

$|a_{n+k} - a_n| \leq \varepsilon$ (k est fixé). Donc n_0 peut dépendre de k . Si $a_n = \sqrt{n}$ si on augmente k , on va trouver n_0 toujours plus grand pour le même $\varepsilon > 0$.

Mais dans la propriété de Cauchy, n_0 est le même pour toute différence

d'indices: $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| \leq \varepsilon$.
($m-n$) ($m-n$) arbitrairement grand.

Donc la propriété de Cauchy est plus forte que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+k} - a_n) = 0$
 $\forall k \in \mathbb{N}$.

Limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée.

Déf Soit (x_n) une suite bornée : $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

On définit la suite $y_n = \sup \{x_k, k \geq n\}$ $y_n \downarrow$ $y_n \geq x_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

la suite $z_n = \inf \{x_k, k \geq n\}$ $z_n \uparrow$ $z_n \leq x_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Alors:

$$\exists \lim y_n \stackrel{\text{dét}}{=} \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$$
$$\exists \lim z_n \stackrel{\text{dét}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\left. \begin{array}{l} (y_n) \downarrow, \text{ minorée par } m \\ (z_n) \uparrow, \text{ majorée par } M \end{array} \right\} z_n \leq x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Ex 1. $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$, $n \geq 1$ bornée : $-2 \leq (x_n) \leq 2$

$$x_n = \left(-2, 1 + \frac{1}{4}, -1 - \frac{1}{9}, 1 + \frac{1}{16}, -1 - \frac{1}{25}, \dots \right)$$

$n = \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

exercice

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{16}, 1 + \frac{1}{16}, \dots, 1 + \frac{1}{\left(n + \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)^2} \dots \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$$

$$z_n = \left(-2, -1 - \frac{1}{9}, -1 - \frac{1}{9}, -1 - \frac{1}{25}, \dots, -1 - \frac{1}{\left(n + \frac{1+(-1)^n}{2}\right)^2} \dots \right) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = -1$$

$\limsup x_n = 1 \quad \liminf x_n = -1$

Remarque: Si $\liminf x_n = \limsup x_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = l$

On a: $z_n \leq x_n \leq y_n \Rightarrow$ Par les 2 gendarmes $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $l \quad \quad \quad l$

Remarque Si $\limsup x_n = l_1$ et $\liminf x_n = l_2 \Rightarrow$ il existe une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ convergente vers l_1 et une sous-suite $\{x_{n_j}\}$ convergente vers l_2

Proposition Une suite bornée (x_n) converge vers $l \in \mathbb{R} \iff$
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = l$ (Voir DZ).

Ex 1. $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \quad n \geq 1$

On a calculé $\limsup x_n = 1$
 $\liminf x_n = -1 \Rightarrow$ la suite est divergente

Ex 2. $x_n = 1 - \frac{1}{n}, n \geq 1$ Trouver $y_n, z_n, \liminf x_n, \limsup x_n$

$x_n = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots)$

$y_n = \sup \{x_k : k \geq n\} = (1, 1, 1, \dots) \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$

$z_n = \inf \{x_k : k \geq n\} = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots) \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$

(x_n) convergente $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

Question 10

Soit $a_n = \frac{1}{3 + \left(\frac{2n^2-1}{n^2+n+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$, $n \in \mathbb{N}$. Alors

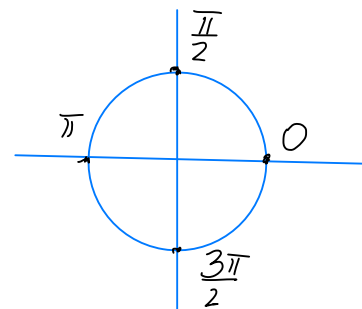
A. $\liminf a_n = -\frac{1}{3}$ et $\limsup a_n = \frac{1}{3}$

B. $\liminf a_n = \limsup a_n$

C. $\liminf a_n = 0$ et $\limsup a_n = 1$

D. $\liminf a_n = \frac{1}{5}$ et $\limsup a_n = 1$

E. $\liminf a_n = \frac{1}{5}$ et $\limsup a_n = \frac{1}{3}$



$$\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0, 1, 0, -1, \dots$$

périodique

$$\frac{2n^2-1}{n^2+n+1} \rightarrow \frac{2-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \rightarrow 2$$

$$\frac{1}{3 + \left(\frac{2n^2-1}{n^2+n+1}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$$

↓ ↓ ↓
-2 0 2

$$\limsup a_n = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$\liminf a_n = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$$

Chapitre 3. Séries numériques.

Définitions et exemples.

Déf La série de terme général a_n est un couple

(1) la suite (a_n)

(2) la suite des sommes partielles $S_n \stackrel{\text{dét}}{=} \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$

Notation: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ - Série de terme général a_k
 $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ n-ième somme partielle

Déf Série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est convergente $\stackrel{\text{dét}}{\iff}$ la suite (S_n) des sommes partielles est convergente.

Si: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$, on dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge vers l

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = l$$

Si (S_n) est divergente, alors on dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est divergente

En particulier, si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$, on écrit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm \infty$.

Ex 0. $\sum_{n=0}^{\infty} n$; $S_n = \sum_{k=0}^n k = 0+1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \geq n$ n'est pas bornée $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n = \infty$ divergente

Ex 1. Série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$; $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n})$

Rappel: $(1+x+x^2+\dots+x^n) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \forall x \neq 1$ → O suite géométrique $r = \frac{1}{2} < 1$

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = S_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2.$

D'une manière similaire on obtient $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1$

Exercice: $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ est divergente, si $|r| \geq 1$.

(1) $|r| > 1 \Rightarrow$ la suite $S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ n'est pas bornée \Rightarrow divergente

(2) $r = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^n 1 = S_n = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$ divergente

(3) $r = -1 \Rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k = S_n : (1, 0, 1, 0, 1, \dots) \Rightarrow (S_n)$ est divergente.
 $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$

Le paradoxe d'Achille et de la tortue (Zénon d'Élée ~450 av. J.C.) -93-

Achille: $10 \frac{m}{s}$

La tortue: $0.1 \frac{m}{s}$

Zénon: Achille ne pourra jamais rattraper la tortue s'il la accorde une avance de 100m (par exemple).

Achille \rightarrow +100m \Rightarrow la tortue \Rightarrow +1m

Achille \rightarrow +1m \Rightarrow la tortue \Rightarrow +1cm.

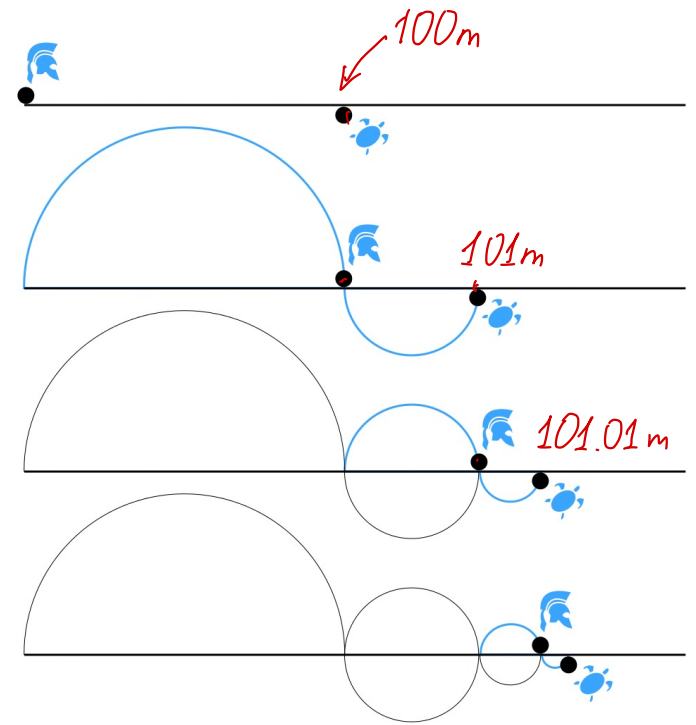
Ainsi, chaque fois la tortue se retrouve encore plus loin qu'Achille.

Considérons le temps qu'il faudrait à Achille pour rattraper la tortue.

$$T = \frac{100m}{10 \frac{m}{s}} + \frac{1m}{10 \frac{m}{s}} + \frac{0.01m}{10 \frac{m}{s}} + \dots = 10 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \dots = 10 \left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \dots \right)$$

$$= 10 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100}\right)^k = 10 \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = 10 \cdot \frac{1}{\frac{99}{100}} = \frac{1000}{99} \text{ s}$$

\Rightarrow Achille rattrapera la tortue après $\frac{1000}{99}$ secondes



série géométrique $r = \frac{1}{100}$

Conclusion: D'après Zenon, l'impossibilité pour Achille de rattraper la tortue vient du fait qu'il lui faudrait couvrir un nombre infini d'intervalles. Mais d'après notre calcul, une somme infinie d'intervalles de décroissance géométrique converge vers une longueur finie.

Ex2. Série harmonique.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ Cette série est divergente

Dém Supposons $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$; $S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$

$S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \ S_7 \ \dots$ (S_{2n}) est une sous-suite
 $S_2 \ S_4 \ S_6$ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$

$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \left(\frac{1}{2n}\right) \cdot n = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\begin{matrix} n \rightarrow \infty \downarrow & \downarrow & & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ 0 = S - S & \geq & & & \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \geq \frac{1}{2} \text{ absurde} \end{matrix}$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ est divergente. ▣