1.3. Infimum

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$,

<u>minimum</u>: s'il existe $m \in A$ tel que $\forall x \in A$, $m \leq x$, on dit que m est le minimum de A.

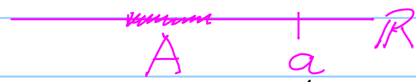
<u>maximum</u>: s'il existe $M \in A$ tel que $\forall x \in A$, $x \leq M$ on dit que M est le maximum de A.

<u>Exemple</u>: l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ n'admet ni minimum ni maximum

<u>Remarque</u>: s'ils existent, le minimum et le maximum sont uniques.

<u>minorant</u> $a \in \mathbb{R}$ est un minorant de $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, si $\forall x \in A$, $a \leq x$.

<u>majorant</u> $a \in \mathbb{R}$ est un majorant de $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, si $\forall x \in A$, $x \leq a$.



<u>minoré</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est minoré, si A admet un minorant.

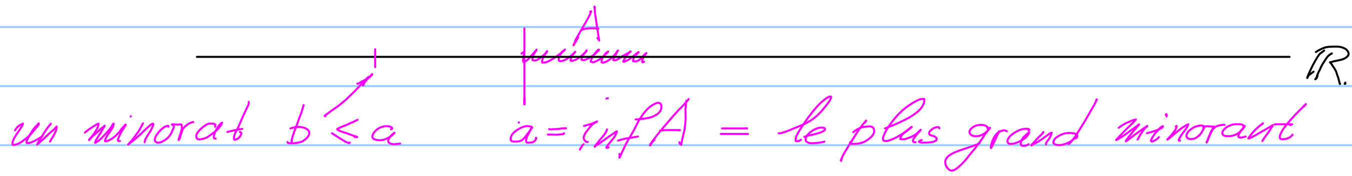
<u>majoré</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est majoré, si A admet un majorant.

<u>borné</u>: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est borné si A est minoré et majoré.

Infimum: un minorant $a \in \mathbb{R}$ de $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est appelé *infimum* ou *borne inférieure* de A,

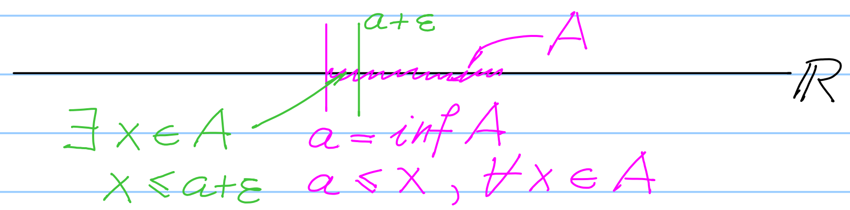
$$a = \inf A$$

si a est le plus grand minorant de A c'est-à-dire si tout minorant b de A satisfait $b \leq a$.



Autrement dit: i) $\forall x \in A$ on a $\inf A \leq x$

ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $\exists\ x \in A$ tel que $x \leq \inf A + \varepsilon$.



Remarque: $\inf A$ (pour $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A minoré) existe par définition de $\mathbb{R}$, c'est l'axiome 3)

Remarque: la condition i) signifie que $\inf A$ est un minorant de A

Remarque: la condition ii) signifie que $\inf A$ est le maximum de l'ensemble des minorants de A:

$$\inf A = \text{maximum}\{a \in \mathbb{R} : a \text{ un minorant de } A\}$$

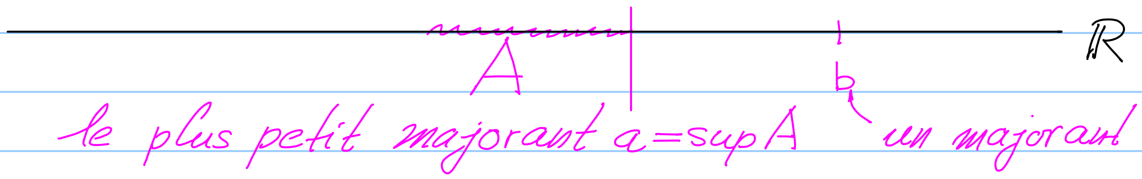
1.4. Supremum

D'une manière équivalente

Définition: un majorant $a \in \mathbb{R}$ de $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ est appelé supremum ou borne supérieure de A

$$a = \sup A$$

si a est le plus petit majorant de A, c'est-à-dire si tout majorant b de A satisfait $b \geq a$.

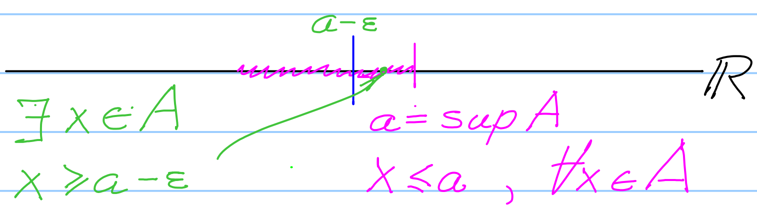


Autrement dit:

$$\sup A = \text{minimum}\{a \in \mathbb{R} : a \text{ un majorant de } A\}$$

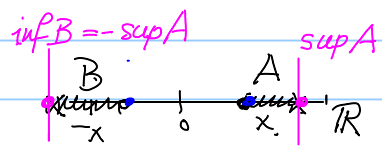
Autrement dit: i) $\forall x \in A$ on a $x \leq \sup A$

ii) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0, \exists x \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon \leq x$.



Remarque: soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, et soit

$$B := \{x \in \mathbb{R} : -x \in A\},$$



alors $\sup A = -\inf B$

Remarque: soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

minimum: si $\inf A \in A$, alors $\inf A = \text{minimum } A$
$\equiv \min A$

maximum: si $\sup A \in A$, alors $\sup A = \text{maximum } A$
$\equiv \max A$

Convention (abus de notation): Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- si A <u>n'est pas minoré</u> on écrit $\inf A = -\infty$ $(\notin \mathbb{R})$
- si A <u>n'est pas majoré</u> on écrit $\sup A = +\infty$ $(\notin \mathbb{R})$

Exemples

1) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$, $\inf A = -\infty$, $\sup A = 1$

2) $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$, $\inf A = -\infty$, $\sup A = 1 = \max A$

3) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x, x^2 < 2\}$, $\inf A = 0 = \min A$

$\sup A =: \sqrt{2}$

1.5. $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$

Soit

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x,\ x^2 < 2\}$$

<u>Proposition : $\boxed{a := \sup A}$ satisfait $a^2 = 2$</u> $\quad (a =: \sqrt{2})$

0) $1 \in A$ car $0 \leq 1$ et $1^2 = 1 < 2$.
$\Rightarrow a \geq 1$ (propriété i) du sup)

1) $\boxed{\text{supposons que } a^2 < 2}$: puisque $\mathbb{R}$ est archimédien

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \cdot (\underbrace{\overset{\overset{x}{\shortparallel}}{2 - a^2}}_{>0}) > \overset{\overset{y}{\shortparallel}}{2a + 1}$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{2a+1}{n} < 2 - a^2}_{(*)}$$

<u>Avec ce n :</u>

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} \underset{n \geq 1}{\leq} a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n} = a^2 + \frac{2a+1}{n} <$$

$$\underset{(*)}{<} a^2 + 2 - a^2 = 2.$$

Ceci montre que $x = a + \frac{1}{n} \in A$ car $x \overset{a \geq 1 \text{ par } 0)}{\geq} 0$ et $x^2 < 2$
ce qui est en contradiction avec $a = \sup A$
(propriété i) du sup). En conclusion $\boxed{a^2 \geq 2}$

2) $\boxed{\text{Supposons que } a^2 > 2.}$: puisque $\mathbb{R}$ est archimédien

$\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n.(\underbrace{\overset{x}{a^2-2}}_{>0}) > \overset{y}{2a}$

$\Leftrightarrow a^2 - 2 > \frac{2a}{n} \Leftrightarrow a^2 - \underbrace{\frac{2a}{n} > 2}_{(*)}.$

Avec ce n :

Puisque $a - \frac{1}{n} < a$ il existe par la définition de $a = \sup A$ (propriété ii) du sup) un $x \in A$ tel que.

$$0 \underset{a \geq 1, n \geq 1}{\leq} a - \frac{1}{n} \leq x \qquad (**)$$

propriété ii) du sup

et on trouve

$$x^2 \overset{(**)}{\underset{0 \leq}{\geq}} x\left(a - \frac{1}{n}\right) \overset{(**)}{\underset{0 \leq}{\geq}} \left(a - \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 - \frac{2a}{n} + \overset{>0}{\frac{1}{n^2}} > a^2 - \frac{2a}{n} \underset{(*)}{>} 2$$

Donc $x^2 > 2$ et donc $x \notin A$ ce qui est en contradiction avec $a = \sup A$ (propriété ii) du sup). En conclusion $\boxed{a \leq 2.}$

1) et 2) impliquent que $a^2 = 2$, car $a^2 \geq 2$ par 1) et $a^2 \leq 2$ par 2) et $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total.

$\square$

1.6 Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

nombres à virgule "périodiques"

$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ = les irrationnels

$\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}_- := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$, $\mathbb{R}_-^* := \mathbb{R}_- \setminus \{0\}$

1.6.1. Intervalles

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $\boxed{a \leq b}$

intervalle ouvert: $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

intervalle fermé: $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Remarque pour le cas $a=b$: $]a, a[= \emptyset \subset \mathbb{R}$

$[a, a] = \{a\} \subset \mathbb{R}$.

autres intervalles: $]a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

intervalles ouverts non bornés

$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < +\infty\}$

$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < b\}$

$]-\infty, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}$

intervalles fermés non bornés

$$[a, +\infty[\; := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < +\infty\}$$

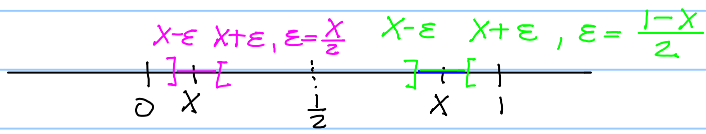
$$]-\infty\ b] := \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq b\}$$

1.6.2. Ensembles ouverts et ensembles fermés

Définition: un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est appelé ouvert, si pour tout $x \in A$ il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$

Exemple: $A =]0,1[$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

Démonstration



1) cas $\frac{1}{2} \leq x < 1$: choisir $\varepsilon = \frac{1-x}{2}$.

2) cas $0 < x < \frac{1}{2}$: choisir $\varepsilon = \frac{x}{2}$.

Plus d'exemples

ceci n'est pas un intervalle

$]0,1[$, $]-1,0[\cup]0,1[$, $\mathbb{R}$, $]a, +\infty[$

sont des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$.

Définition: un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est appelé fermé si $\mathbb{R} \setminus A$ est un ensemble ouvert.

Exemples: $[0,0]$, $[0,1]$, $[0,1] \cup [2,3]$, ϕ, $]-\infty, a]$

sont des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}$.

<u>Remarque</u>: pour être cohérent on doit aussi définir $\phi =]a,a[$ comme un ensemble ouvert et $\mathbb{R} = \mathbb{R} \setminus \phi$ comme fermé. ϕ et $\mathbb{R}$ sont les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui sont <u>à la fois</u> ouverts <u>et</u> fermés.

<u>Remarque</u>: $[0,1[$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont <u>ni</u> ouverts <u>ni</u> fermés

1.7. Valeur absolue

1.7.1. Définition et propriétés

Définition: Pour $x \in \mathbb{R}$ on définit la (fonction) valeur absolue $|x|$ par

$$|x| \equiv abs(x) := \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés de base

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$|-x| = |x| \quad , \quad |x \cdot y| = |x||y|$$

$$|x| = \sqrt{x^2} \quad ! \quad (\text{avec } \sqrt{0^2} := 0)$$

$$|x| \leq |y| \iff x^2 \leq y^2$$

Inégalités triangulaires

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|$$

$$|x \pm y| \geq \big| |x| - |y| \big|$$