0.7 Les nombres rationnels, concepts de base

0.7.1 Opérations algébriques

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \right\} \qquad (= \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$$

$$\text{"}+\text{"} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{a d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

$$\text{"}\cdot\text{"} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Sur $\mathbb{Q}$ on a une relation d'équivalence

$$\boxed{\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad a \cdot d = b \cdot c}$$

← vérifier que ceci définit bien une relation d'équivalence

<u>Exemple</u> $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4}$ car $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$.

<u>Notation</u> on écrit $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ au lieu de $\frac{1}{2} \sim \frac{2}{4}$

On devrait donc définir : $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* /_\sim$ pour être précis et <u>nous allons adopter ce point de vue à partir de maintenant</u>.

<u>Important</u>: "+" et "·" sont compatibles avec la relation d'équivalence (vérifier !), c'est-à-dire

si $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}$

alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$

Remarques

- Le représentant privilégié d'un nombre $x \in \mathbb{Q}$ est $\frac{p}{q}$ avec $q > 0$ et $\mathrm{pgcd}(|p|, q) = 1$.
- Soit $x = \frac{a}{1}$, $y = \frac{b}{1}$ alors $x + y = \frac{a+b}{1}$, $x \cdot y = \frac{a \cdot b}{1}$

  et on récupère donc les opérations de $\mathbb{Z}$ si on identifie $\frac{p}{1} \in \mathbb{Q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et ainsi $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

07.2 Opérations inverses

<u>"inverse" pour +</u> : pour $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ on définit

$-x \in \mathbb{Q}$ par : $-x := \frac{-p}{q} \quad \left(\sim \frac{p}{-q}\right)$

et on a $x + (-x) = 0 \quad \left(= \frac{0}{1} \sim \frac{0}{q}, q \in \mathbb{Z}^*\right)$

<u>inverse pour ·</u> : soit $\boxed{x = \frac{p}{q}} \in \mathbb{Q}$ avec $p \neq 0$,

alors $\boxed{y = \frac{q}{p}} \in \mathbb{Q}$ est bien défini et on a

$$x \cdot y = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{q \cdot p} \underset{\text{équivalence}}{=} \frac{1}{1} = 1$$

identification de $\frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$ avec $1 \in \mathbb{Z}$.

Pour $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $y = \frac{q}{p}$ est donc l'inverse de x.

<u>Notations pour l'inverse</u>: soit $x \in \mathbb{Q}^*$, alors

on note son inverse par: $\boxed{x^{-1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x}}$

<u>Exemple:</u> $x = \frac{2}{3}$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

car $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{6}{6} = \frac{1}{1} = 1.$

<u>Attention !</u> (☺, trouver l'erreur !)

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{\frac{2}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

Chapitre 1

Les nombres réels $\mathbb{R}$

1.1 Les nombres rationnels, propriétés

1.1.1 $\mathbb{Q}$ est un corps

Proposition: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps, c'est-à-dire :

"$\mathbb{Q}$ muni des opérations $\oplus$ et $\odot$"

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{Q}$

$\oplus$

$x + (y+z) = (x+y) + z$	associative
$x + y = y + x$	commutative
$0 + x = x$	$\exists$ élément neutre
0 : zéro $\in \mathbb{Q}$	
$(-x) + x = 0$	$\exists$ élément "inverse"

$\odot$

$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	associative
$x \cdot y = y \cdot x$	commutative
$1 \cdot x = x$	$\exists$ élément neutre
1 : un $\in \mathbb{Q}$	
pour $x \neq 0$ $\quad (x^{-1}) \cdot x = 1$	$\exists$ élément inverse

$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ distributivité de l'opération $\cdot$ sur le $+$.

$\mathbb{Q}$ est un corps ordonné (il existe "$\leq$" avec O1 – O5)

Pour ordonner $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ (choisir $b, d > 0$)

on utilise les représentants $x = \frac{ad}{bd}$, $y = \frac{b \cdot c}{b \cdot d}$,

(même "dénominateur") puis on compare les "numérateurs" c'est-à-dire on définit :

Definition soit $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, avec $b, d > 0$

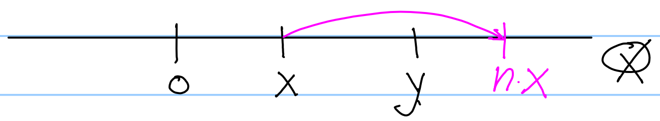
alors $\boxed{\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \quad \text{si} \quad ad \leq bc}$

Remarques: $\leq$ est compatible avec $\sim$ sur $\mathbb{Q}$.
$\leq$ définit une relation d'ordre total
(vérifier O1 — O3 !, voir Section 0.5)
$\leq$ est compatible avec les opérations $+, \cdot$
(vérifier O4, O5 !, voir Section 0.5)

1.1.2. Propriété importante de $\mathbb{Q}$

$\mathbb{Q}$ est (un corps) archimédien (satisfait l'axiom d'archimède), c'est-à-dire:

Proposition: pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $x > 0$, $y \geq 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \cdot x > y$.



Démonstration (construction de n, raisonnement déductif,
si A est vrai et $A \Rightarrow B$, alors B est vrai)

- si $x > y$ on a avec $n = 1$: $nx = 1 \cdot x = x > y$

- si $y \geq x > 0$ alors on peut écrire $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, c.-à-d. $a, b, c, d \geq 1$.

Par définition de $\leq$: $n\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow n(ad) > (bc)$

Puisque $a, d \geq 1 \Rightarrow a \cdot d \geq 1$ et donc, avec $n = (bc) + 1$
on a $n \cdot (ad) \geq n = (bc) + 1 > (bc)$

1.1.3 Proposition (soit $x \in \mathbb{Q}$, alors $x^2 \neq 2$.)

Démonstration (raisonnement par l'absurde, si B est vrai et $A \Rightarrow \neg B$, alors $\neg A$ est vrai)

Soit $x \in \mathbb{Q}$. Supposons que $\underbrace{x^2 = 2}_{A}$

On a $x = \frac{p}{q}$ et on peut choisir $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\mathrm{pgcd}(p,q) = 1}_{B}$

$$\underbrace{x^2 = 2}_{A} = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \boxed{p^2 = 2 \cdot q^2}$$

Donc p^2 est pair, donc p est pair $\Rightarrow p = 2 \cdot a$, $a \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow (2 \cdot a)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot a^2 = 2 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = 2a^2.$$

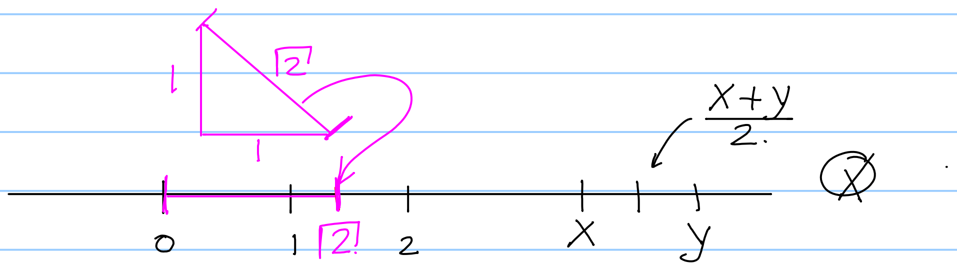
Donc q^2 est pair, donc q est pair $\Rightarrow q = 2 \cdot b$, $b \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \mathrm{pgcd}(p,q) = \mathrm{pgcd}(2a, 2b) = 2 \cdot \mathrm{pgcd}(a,b) \underbrace{\neq 1}_{\neg B}.$$

$\times$ $\underbrace{\mathrm{pgcd}(p,q) = 1}_{B}$. Donc $\underbrace{x^2 \neq 2}_{\neg A}$ (est vrai).

"en contradiction avec"

Conclusion: l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.



Si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in \mathbb{Q}$. On peut construire dans $\mathbb{Q}$ des nombres arbitrairement proche de $\sqrt{2}$ (voir plus loin dans le cours), mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

1.2 Introduction axiomatique de $\mathbb{R}$

$\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots \quad , e, \pi \notin \mathbb{Q}$

On demande de l'ensemble $\mathbb{R}$ la même structure algébrique que pour $\mathbb{Q}$:

1) $\mathbb{R}$ est un corps

2) $\mathbb{R}$ est pourvu d'une relation d'ordre total, compatible avec les opérations $+, \cdot$.

Puis on demande de plus :

3) $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne inférieure.

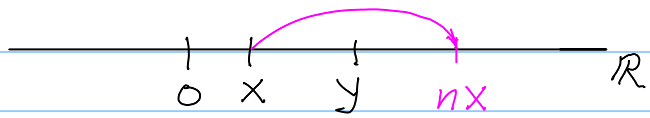
c'est-à-dire "tout sous-ensemble non-vide minoré de $\mathbb{R}$ admet (dans $\mathbb{R}$) un plus grand minorant."

à définir

Remarque 3) $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$ a la propriété de la borne supérieure
3) $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$ a la propriété de complétude

1) + 2) + 3) $\mathbb{R}$ est un corps ordonné complet

Important 3) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire



$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, y \in \mathbb{R}, y \geq 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ t.q. $nx > y$.,

Remarque: l'axiome d'Archimède est équivalent à dire que pour tout $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $r < n$. (le montrer !)

Remarque: l'axiome d'Archimède implique que si $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$ alors $a = 0$. (le montrer !)

Remarque: d'une manière équivalente, si $a \in \mathbb{R}$ est tel que pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ on a. $0 \leq a \leq \varepsilon$, alors $a = 0$ (le montrer !)

Remarques: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ les nombres irrationnels

Définition: droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \underbrace{+\infty}_{\infty}\}$

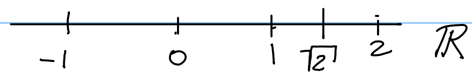
Propriétés:

$$-\infty < +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Existence de $\mathbb{R}$ (modèles pour $\mathbb{R}$)

1) la droite numérique.



2) l'ensemble des nombres à virgule

$$r = a.a_1 a_2 a_3 \ldots \quad \text{avec } a \in \mathbb{Z}$$
$$a_1, a_2, \ldots \in \{0, \ldots, 9\}$$

avec $0.999\ldots \sim 1.000\ldots$ etc. (équivalence).

3) des classes d'équivalence de suites de Cauchy de nombres rationnels.
à définir