Notations équivalentes :

"$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$" $\equiv$ "$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$" $\equiv$ "$a_n \longrightarrow a$, lorsque $n\to\infty$"

Exemples

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \overset{\parallel}{=} 1$ (voir 3.3.2)

$\inf\left\{ 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots \right\}$

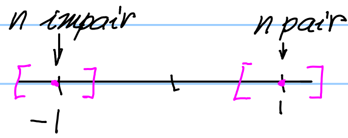
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ← valeur de la limite <u>à montrer que c'est ça !</u>

Démonstration : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ($\Leftarrow \exists n_0$ tel que $n_0 \cdot \varepsilon \geq 1$) ← R est archimédien $\underset{\overset{\parallel}{n_0}}{x} \cdot \underset{\overset{\parallel}{1}}{1} > \underset{\overset{\parallel}{\frac{1}{\varepsilon}}}{y}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0,\ 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0,\ \left|\frac{1}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ n'existe pas

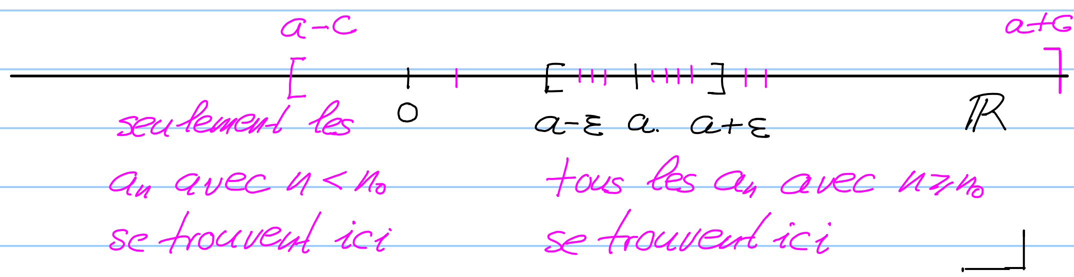


3.5. Deux propositions

Proposition: si une suite converge sa limite est unique.

Proposition: toute suite convergente est bornée.

Explication:



Démonstration:

Soit $\varepsilon = 1$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|a_n - a| \leq 1$.
Soit $c = \text{maximum}\{1, |a_1 - a|, \dots, |a_{n_0-1} - a|\}$. Alors.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| \leq c$, et donc :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| = |a + a_n - a| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + c$

3.6 Suites divergentes

Définition: une suite (a_n) qui n'est pas convergente est appelée divergente

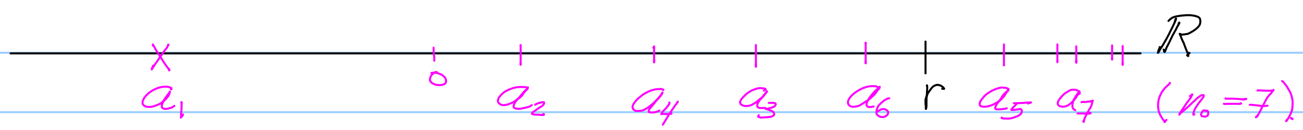
Exemple : $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ est une suite divergente

"Limites" infinies

Définition : soit (a_n) une suite telle que pour tout $r \in \mathbb{R}$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $a_n \geq r$ $(a_n \leq r)$. Alors on écrit

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \left(\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty\right)$$

et on dit que la suite tend vers $+\infty$ (vers $-\infty$).



Exemples: $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

Remarque: si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ alors la suite diverge !

Super-attention : on évitera de dire que la suite (a_n) "converge" vers $+\infty$ (ou $-\infty$) si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (ou $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).

Remarque: la suite $a_n=(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$ diverge et elle ne tend pas non plus vers $+\infty$ ou $-\infty$.

3.7 Opérations algébriques sur les limites

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, avec $a,b\in\mathbb{R}$, alors

pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ on a:

i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha\cdot a_n+\beta b_n)=\alpha\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\beta\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha a+\beta b$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)\cdot\left(\lim\limits_{n\to\infty}b_n\right)=a\cdot b$

iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{\underbrace{b_n}_{\neq 0}}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\dfrac{a}{b}$ si $b\neq 0$.

Démonstration: $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tel que

$"\max\{n_1,n_2\}"$

i) $|(\alpha\cdot a_n+\beta b_n)-(\alpha a+\beta\cdot b)|\leq\underbrace{|\alpha||a-a_n|}_{\leq\frac{1}{2}\varepsilon}+\underbrace{|\beta||b-b_n|}_{\leq\frac{1}{2}\varepsilon}\leq\varepsilon$

$n\geq n_1 \rightarrow$ $\quad$ $n\geq n_2 \rightarrow$

ii) $|a_nb_n-a\cdot b|\leq\underbrace{|a_n-a||b_n|}_{\leq\frac{1}{2}\varepsilon}+\underbrace{|b_n-b||a|}_{\leq\frac{1}{2}\varepsilon}\leq\varepsilon$

$a_nb_n-ab=(a_n-a)b_n+(b_n-b)a$

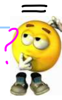
on utilise que la suite (b_n) est bornée.

iii) similaire à ii)

Exemple:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n\left(3-\frac{5}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{3n\left(1-\frac{5}{3n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\,\frac{1+\frac{3}{2n}}{1-\frac{5}{3n}}\right)=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{2n}}{1-\frac{5}{3n}}=$$

Si ?  $=\dfrac{2}{3}\,\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{3n}\right)}$ Si ?  $=\dfrac{2}{3}\,\dfrac{1+\frac{3}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1-\frac{5}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\dfrac{2}{3}$

 "on a le théorème"

Attention aux hypothèses (le **Si**)

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \frac{\lim_{n\to\infty} n}{\lim_{n\to\infty} n} = \frac{\infty}{\infty}$$

n'est pas définie

le **Si** n'est pas vérifié

3.8 Théorème des deux gendarmes

Théorème : soient $(a_n), (b_n), (c_n)$, $n \in \mathbb{N}$ trois suites.

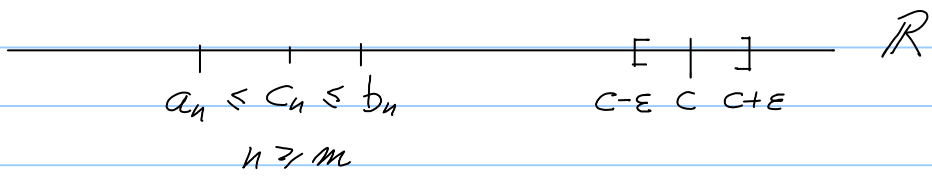
Si i) $\lim_{n\to\infty} a_n = c$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = c$

ii) il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq m$!

$$a_n \leq c_n \leq b_n$$

alors $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Démonstration



On a $a_n \leq c_n \leq b_n \iff a_n - c \leq c_n - c \leq b_n - c$, $\forall n \geq m$ $(*)$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \geq m$ tel que $\forall n \geq n_0$ $\begin{cases} |a_n - c| \leq \varepsilon & ① \\ |b_n - c| \leq \varepsilon & ② \end{cases}$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$

$$-\varepsilon \underset{①}{\leq} a_n - c \underset{(*)}{\leq} c_n - c \underset{(*)}{\leq} b_n - c \underset{②}{\leq} \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0$, $|c_n - c| \leq \varepsilon \overset{\text{Déf.}}{\iff} \lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Exemples

i) $a_n := -\frac{1}{n^2+1} \leq c_n = \frac{\cos(7n^2+3)}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} =: b_n \ , n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ccc} a_n & c_n & b_n \\ \downarrow n\to\infty & \downarrow n\to\infty & \downarrow n\to\infty \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ 0 \leq x \leq y$ on a. $x^2 \leq yx = x\cdot y \leq y^2$

$1 \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}} \Rightarrow \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq \sqrt{1+\frac{1}{n}}^2 = 1+\frac{1}{n}.$

ii) $a_n := 1 \leq c_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n} =: b_n \ , n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{array}{ccc} a_n & c_n & b_n \\ \downarrow n\to\infty & \downarrow n\to\infty & \downarrow n\to\infty \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

sinon on doit avoir $\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{x} \leq \underbrace{1}_{y}$

$\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{x^2} \leq \underbrace{1}_{y^2}$

ce qui est faux.

iii) astuce (un exemple)

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\right) \underset{\text{astuce}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

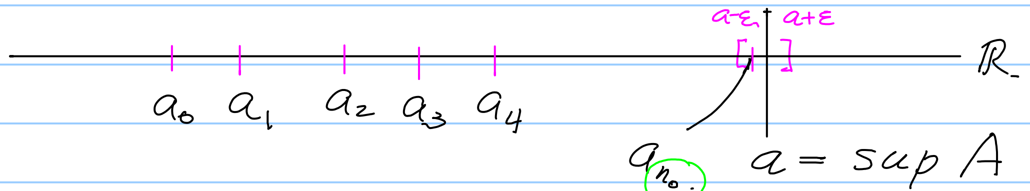
3.9. Suites monotones

3.9.1 Critère de convergence

Théorème: toute suite (a_n) croissante et majorée (décroissante et minorée) est convergente et $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup A$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A\right)$ où $A = \{a_0, a_1, \dots\}$

Théorème: toute suite monotone et bornée est convergente

Démonstration: pour le sup, pour l'inf voir 3.3.2. Exemple



$a = \sup A$
$= \sup\{a_0, a_1, \dots\}$

i) $\forall n, \; a_n \leq a$

un certain numéro tel que

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\underbrace{a_{n_0}}_{\in A} \geq a - \varepsilon$ $\Bigg\}$ Définition du sup $\underset{!}{\nabla}$

iii) $\forall n \geq n_0 \; , \; a_n \geq a_{n_0}$ (la suite est croissante)

$a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_{n_0}$

i) + ii) + iii) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$,

$a - \varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_n \leq a.$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \varepsilon.$

Ceci montre que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_0, a_1, \dots\}$ $\square$

3.9.2. Exemples

Exemple 1

Soit $0 \leq q < 1$ et $a_n = q^n$. Alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

i) la suite est décroissante.

ii) la suite est minorée par zéro.

i) + ii) + théorème : $\lim_{n\to\infty} a_n = a = q \cdot \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = q \cdot a$

avec $a \in \mathbb{R}$ et donc $a = 0$.

définition de la limite
le montrer !

<u>Remarque</u>: puisque $|q^n| = |q|^n$, ceci implique que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ pour tout $q \in]-1, 1[$.

le montrer !

Exemple 2

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ donnée par $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$

Donc $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \geq a_1$, ...

<u>i) la suite est croissante</u>

$$n \geq 2: \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}}_{= a_{n-1}}\Big) + \frac{1}{n^2} = a_{n-1} + \frac{1}{n^2} \geq a_{n-1}$$

<u>ii) la suite est bornée</u>

$$a_n \underset{2n+1 > n}{\leq} \sum_{k=1}^{2n+1} \underbrace{\frac{1}{k^2}}_{>0} = 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{2n+1}}_{= \sum\limits_{\substack{k \text{ pair} \\ k=2\ell}} + \sum\limits_{\substack{k \text{ impair} \\ k=2\ell+1}}} \frac{1}{k^2} = 1 + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{(2\ell)^2}}_{1} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{(2\ell+1)^2}}_{\leq \frac{1}{(2\ell)^2}}}_{2 \leq 1}$$

$\Longrightarrow$

$$a_n \leq 1 + \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^2}}_{1} + \frac{1}{4}\underbrace{\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^2}}_{2} = 1 + 2\cdot\frac{1}{4}a_n = 1+\frac{1}{2}a_n$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}a_n \leq 1 \Rightarrow a_n \leq 2$$

i) + ii) + le théorème $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, $a \leq 2$.

En fait (voir plus loin dans le cours) $a = \frac{\pi^2}{6}$

A noter que $a_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 1$

Exemple 3

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ donnée par $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(\in \mathbb{Q})$.

Sans démonstration:
(a_n) est une suite croissante et majorée $(a_n \leq 3)$.
Donc
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = \sup\{a_1, a_2, \ldots\} \in \mathbb{R}.$$

En fait (voir plus loin dans le cours):

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =: e} = 2.71828\ldots \text{ (Nombre d'Euler)}$$

(une) définition (possible) de e