Chapitre 3

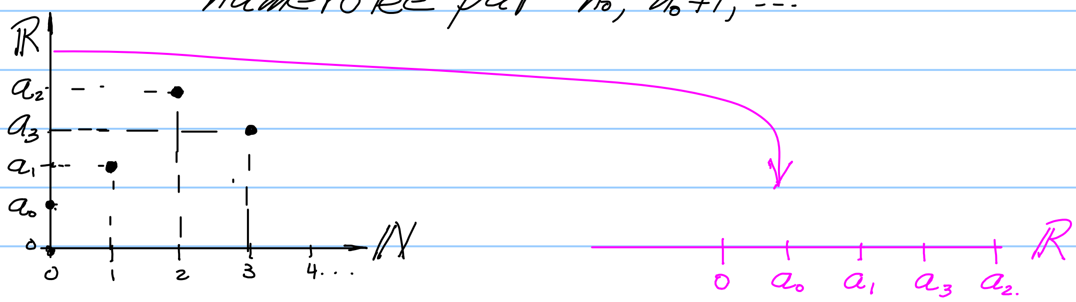
Suites de nombres réels

3.1. Définitions et exemples

Définition On appelle suite de nombres réels toute fonction $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Notation: On pose $a_n = f(n)$ et on écrit (a_n) ou $(a_n)_{n \geq 0}$ ou a_n, $n \in \mathbb{N}$, ou $a_0, a_1, \ldots$ pour la suite.

Remarque: On écrira $(a_n)_{n \geq n_0}$, etc. pour une suite numerotée par $n_0, n_0+1, \ldots$



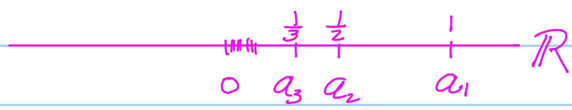
On s'interesse à l'image de f

$$\mathrm{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x = a_n = f(n) \text{ pour un } n \in \mathbb{N}\}$$
$$\equiv \{a_0, a_1, a_2, \ldots\} \equiv A \subset \mathbb{R}$$

Exemples

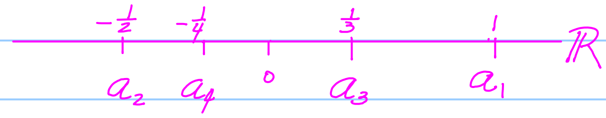
i) Suite harmonique

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \qquad ; \quad a_1 = 1, \; a_2 = \tfrac{1}{2}, \; a_3 = \tfrac{1}{3}, \ldots$$



ii) Suite harmonique alternée

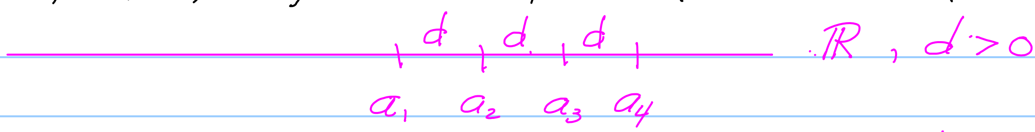
$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \qquad a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

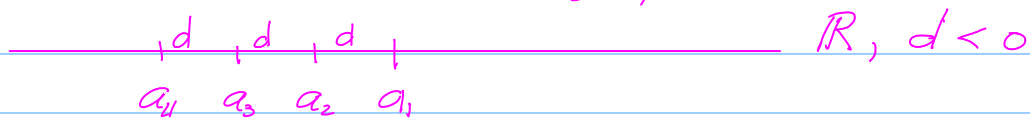


Convention (rappel): $x^0 := 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (zéro)

iii) Suites arithmétiques

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad n \in \mathbb{N}^*, \text{ où } a_1 \in \mathbb{R} \text{ et } d \in \mathbb{R} \text{ sont donnés}$$

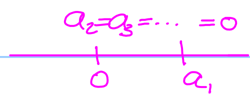




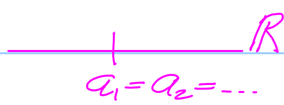
iv) Suites géométriques

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^* \qquad \text{où } a_1, q \in \mathbb{R} \text{ sont donnés}$$

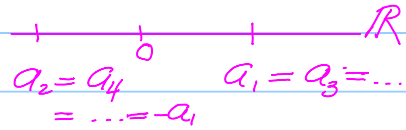
- si $q = 0$: a_1, $a_n = 0$, $n = 2, 3, \dots$



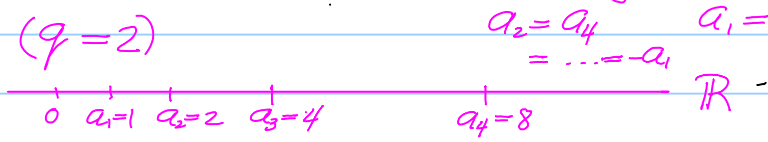
- si $q = 1$: $a_n = a_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$



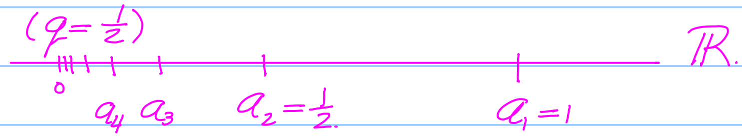
- si $q = -1$: , a_1, $a_2 = -a_1$, $a_3 = a_1$, ..



- si $|q| > 1$:



- si $0 < |q| < 1$:



3.2. Suites définies par récurrence

$\boxed{\text{Donnés } a_1 \in \mathbb{R} \text{ et une fonction } g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}}$ on pose

$$\boxed{a_{n+1} = g(a_n) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots}$$

Exemples

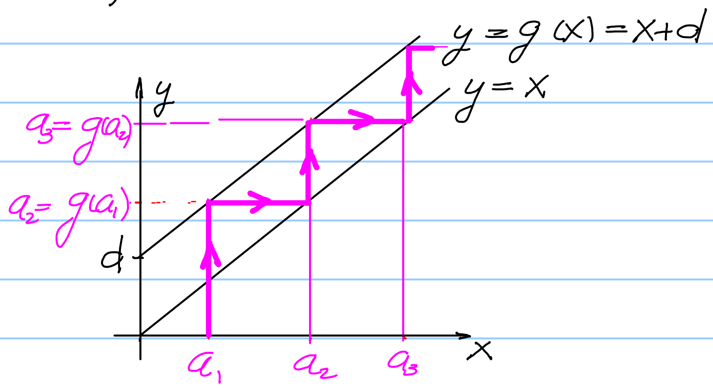
démonstrations par récurrence !

i) $g(x) = x + d$, $d \in \mathbb{R}$, c-à-d $a_{n+1} = a_n + d$ (suite arithmétique)

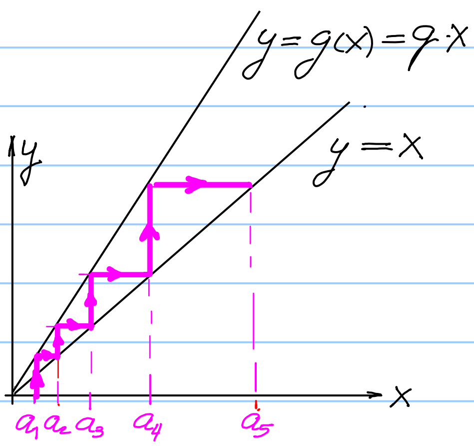
ii) $g(x) = x \cdot q$, $q \in \mathbb{R}$, c-à-d. $a_{n+1} = a_n \cdot q$ (suite géométrique)

Graphiquement

i)



ii)



iii) $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ pour $\underline{a_1 = 1}$ on obtient la suite harmonique

$a_n = \dfrac{1}{n}$: $P(n)$.

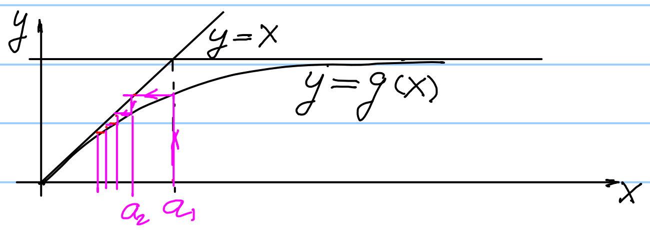
Démonstration

i) $a_1 = \frac{1}{1} = 1$: $P(1)$ ✓

ii) $a_{n+1} = g(a_n) \underset{P(n)}{=} g\left(\frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \dfrac{1}{n+1}$: $P(n+1)$.

donc $\forall n \geq 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Graphiquement



3.3. Propriétés de base

3.3.1 Définitions (pour $n_0 = 0$)

<u>Suite croissante</u>: une suite (a_n) est croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$

<u>Suite strictement croissante</u>: une suite (a_n) est strictement croissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$

<u>Suite décroissante</u>: une suite (a_n) est décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$.

<u>Suite strictement décroissante</u>: une suite (a_n) est strictement décroissante si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} < a_n$

<u>Suite (strictement) monotone</u>: une suite (a_n) est (strictement) monotone si elle est <u>soit</u> (strictement) croissante <u>soit</u> (strictement) décroissante.

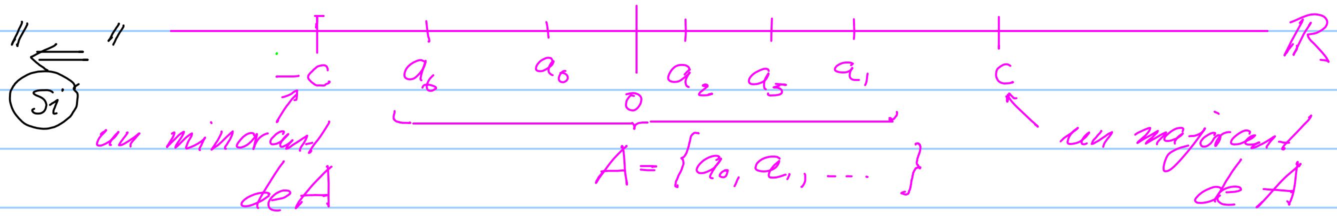
<u>Suite majorée</u>: une suite (a_n) est majorée si l'ensemble $A = \{a_0, a_1, \dots\} \subset \mathbb{R}$ est majoré (voir 1.3.7)

<u>Suite minorée</u>: une suite (a_n) est minorée si l'ensemble $A = \{a_0, a_1, \dots\} \subset \mathbb{R}$ est minoré (voir 1.3.7)

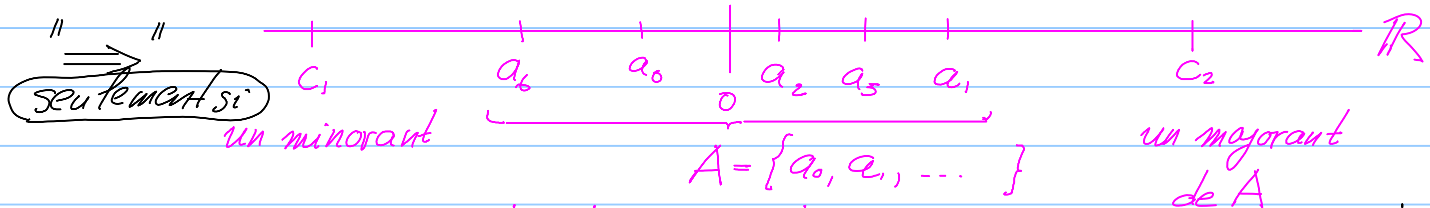
<u>Suite bornée</u>: une suite (a_n) est bornée si elle est majorée <u>et</u> minorée.

<u>Critère</u>: une suite (a_n) est bornée si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq C$

"$\Leftarrow$" Si



"$\Rightarrow$" seulement si

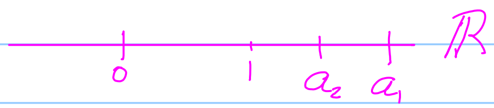


$|a_n| \leq \max\{|C_1|, |C_2|\}$

3.3.2. Exemple (inf et sup)

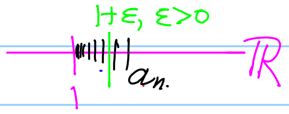
$a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_1 = 2$, $a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, ...

Soit $A = \{ a_1, a_2, \dots \}$.



$\sup A = \text{maximum } A = 2$ (car $2 \in A$ et $1 + \frac{1}{n} \leq 2$, $n = 2, 3 \dots$)

Proposition $\inf A = 1 \notin A$



Démonstration:

i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq 1 + \frac{1}{n} = a_n$. (1 est un minorant)

ii) il faut montrer que $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) il existe n_0 tel que $a_{n_0} \leq 1 + \varepsilon$ (1 est le plus grand minorant).

Soit $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Pour ce n_0 on a $a_{n_0} = 1 + \frac{1}{n_0} \leq 1 + \varepsilon$.

↑ n_0 existe car $\mathbb{R}$ est archimédien et il existe donc n_0 tel que $n_0 \cdot \varepsilon > 1$

Remarque: on a en fait montré le résultat plus fort que <u>pour tout $n \geq n_0$</u> (et pas seulement pour $n = n_0$) $1 \leq a_n = 1 + \frac{1}{n} \leq 1 + \frac{1}{n_0} = a_{n_0} \leq 1 + \varepsilon$.

facultatif

Soit $r \in \mathbb{R}$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $r \leq n$.

Sinon $\forall n \in \mathbb{N}$, $n < r$, c-à-d r est un majorant pour $\mathbb{N}$

$\Rightarrow \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ existe $\underset{\text{ii) du sup}}{\Rightarrow} \exists\, m \in \mathbb{N}$ t.q. $\sup \mathbb{N} - \frac{1}{2} \leq m$

$\Rightarrow \sup \mathbb{N} \leq m + \frac{1}{2} < m + 1 \in \mathbb{N}$ donc $\sup \mathbb{N}$ pas un majorant

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, $y \geq 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$r = \frac{y}{x} \leq n \iff y \leq n \cdot x$, donc $\mathbb{R}$ archimédien

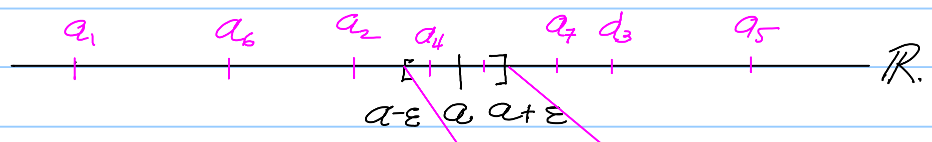
3.4. Limite d'une suite

Définition une suite (a_n) est convergente et admet pour limite (ou converge vers) $a \in \mathbb{R}$, et l'on écrit
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$
si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

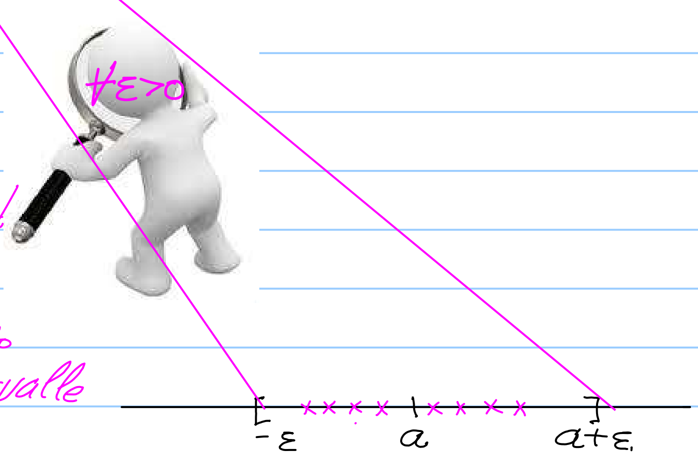
Terminologie: si la suite (a_n) admet une limite $a \in \mathbb{R}$ on dit aussi que la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe. Dans le cas contraire on dit que la limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas.

Rappel: $|a_n - a| \leq \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$

$\ulcorner$ $|a_n - a| \leq \varepsilon \iff -\varepsilon \leq a_n - a \leq \varepsilon \iff a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$ $\lrcorner$



"pour tout $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ on peut trouver n_0 (qui dépendra typiquement de ε) de sorte que tous les a_n avec $n \geq n_0$ se trouvent dans l'intervalle $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$"



<u>Remarque</u>: la démonstration dans 3.3.2 Exemple montre que la suite $a_n = 1+\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$ converge vers $a=1$, car on a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que <u>pour tout</u> $n \geqslant n_0 \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, $1 \leqslant a_n \leqslant 1+\varepsilon$.
$\Longrightarrow |a_n - 1| \leqslant \varepsilon$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

<u>Remarque</u>: dans 3.3.2 Exemple on a donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf A$, où $A = \{a_1, a_2, \dots\}$

Voir le théorème dans 3.9.1