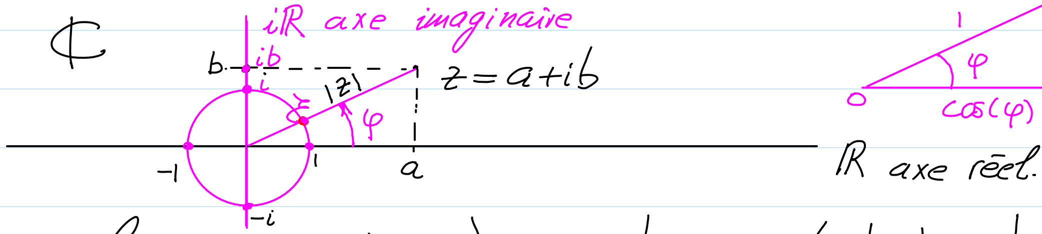
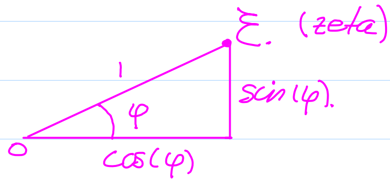
2.6. Forme polaire d'un nombre complexe

2.6.1. Définitions





Soit $z \neq 0$, alors $z = |z|\,\xi$ où $\xi = \frac{1}{|z|} z$ et $|\xi| = \frac{1}{|z|}|z| = 1$.

voir le dessin

$|\xi| = 1 \Rightarrow \xi = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \underset{\text{Euler}}{=} e^{i\varphi}$ utiliser $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

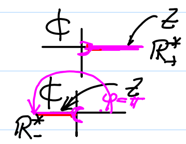
pour un certain φ. Tout $z = a+ib \neq 0$, $a,b \in \mathbb{R}$ est donc de la forme

$a+ib = \boxed{z = |z| \cdot e^{i\varphi}}$ (φ est déterminé à $k \cdot 2\pi$ près, $k \in \mathbb{Z}$)

appelée la forme ou la représentation polaire de $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

> Définition (convention): le nombre $\varphi \in \,]-\pi, \pi]$ est appelé l'argument de $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi = \arg(z)$.

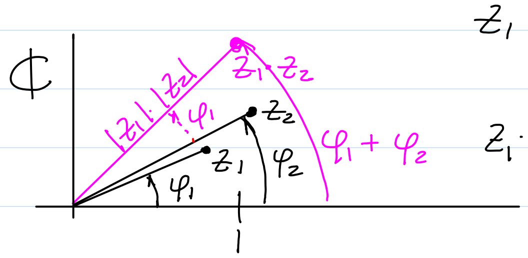
Remarques



- pour $z \in \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{C}^*$ on a $\varphi = \arg(z) = 0$
- pour $z \in \mathbb{R}_-^* \subset \mathbb{C}^*$ on a $\varphi = \arg(z) = \pi$
- pour $z = a+ib \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}_-^*$ on a $\varphi = \arg(z) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{b}{a+|z|}\right)$

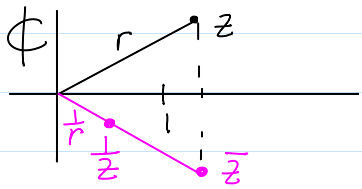
  $= \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ (si $a>0$)
- la forme polaire est mieux adaptée à la multiplication des nombres complexes que la forme cartésienne. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ alors :

$$z_1 = |z_1| e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = |z_2| e^{i\varphi_2}$$



$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

- Soit $r>0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Alors l'inverse de $z = re^{i\varphi}$ est

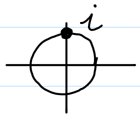
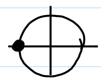


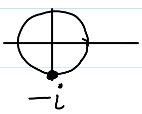
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\,\bar{z} = \frac{1}{r^2}\, r\, \overline{e^{i\varphi}} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$$

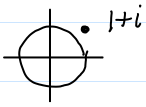
<u>En effet</u> :

$$z \cdot \frac{1}{z} = r \cdot e^{i\varphi} \cdot \frac{1}{r} e^{-i\varphi} = 1 \cdot e^{i(\varphi - \varphi)} = 1 \cdot e^{i0} = e^{0} = 1.$$

<u>2.6.2. Exemples</u>

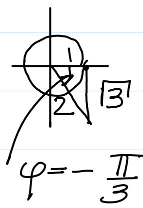
1/2)  $i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$,  $-1 = 1 \cdot e^{i\pi} = e^{i\pi}$

3)  $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\left(\arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \text{ par convention}\right)$

4)  $1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ $\left[= \sqrt{2}\left(\overbrace{\cos(\tfrac{\pi}{4})}^{=\frac{\sqrt{2}}{2}} + i \overbrace{\sin(\tfrac{\pi}{4})}^{=\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = 1+i \right]$

vérification

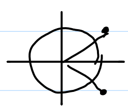
5)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{1+i} \overset{\text{en polaire}}{=} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(\tfrac{\pi}{4}) - i \sin(\tfrac{\pi}{4})\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} i \\[2ex] \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{|\sqrt{2}|^2}(1-i) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} i \quad \text{(calcul en cartésien)} \end{cases}$$

6)  $1 - \sqrt{3}\, i = 2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$(1 - \sqrt{3}\, i)^{30} = \left(2 \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{30} = 2^{30}\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{30} =$$

$$= 2^{30} e^{-i\pi \cdot 10} = 2^{30}\big(\underbrace{e^{-i2\pi}}_{=1}\big)^5 = 2^{30} = \underbrace{1024^3}_{\shortparallel}$$

1'073'741'824

7)  $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4 = \left(\dfrac{\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)^4 = \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^4 = e^{-i2\pi} = 1.$

2.7 Résolution des équations

2.7.1. "Racines" n-ièmes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $w \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Alors, l'équation

$$\boxed{z^n = w} \qquad (*)$$

admet exactement n solutions $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire $(z_k)^n = w$, $k = 1, \dots, n$. Les nombres z_k sont appelés les n "racines" de l'équation $(*)$. Si $w = 0$ la seule solution de $(*)$ est $z = 0$.

"Méthode polaire"

i) $w = |w|\, e^{i(\varphi + 2\pi k)}$ $\qquad k = 0, \dots, n-1$

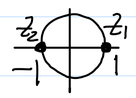
ii) $z_{k+1} = |w|^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \frac{k}{n}\right)}$ $\qquad k = 0, \dots, n-1$

2.7.2. Exemples

1) $z^2 = 1 = e^{i(0 + k \cdot 2\pi)}$, $k = 0, 1$.

$z_{k+1} = e^{i \frac{k}{2} \cdot 2\pi} = e^{i k \cdot \pi}$, $k = 0, 1$.

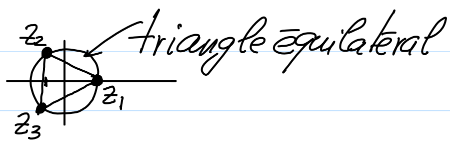
$z_1 = e^{i \cdot 0} = 1$, $z_2 = e^{i\pi} = -1$



2) $z^3 = 1 = e^{i(0 + k \cdot 2\pi)}$, $k = 0, 1, 2$.

$z_{k+1} = e^{i \frac{2\pi}{3} k}$, $k = 0, 1, 2$

$z_1 = e^{i0} = 1$, $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $z_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{z_2}$

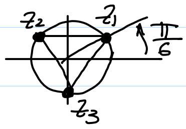


$z_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$

3) $z^3 = i = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right)}$, $k = 0, 1, 2.$

$z_{k+1} = e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}$, $k = 0, 1, 2.$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}$

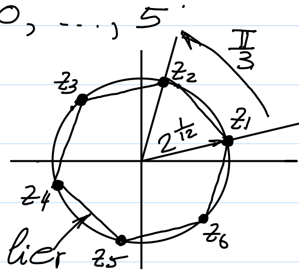


$z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{9\pi}{6}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

4) $z^6 = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi\right)}$, $k = 0, \dots, 5.$

$z_{k+1} = \underset{\left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{6}}}{\underset{\|}{2^{\frac{1}{12}}}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{24} + k\cdot\frac{\pi}{3}\right)}$, $k = 0, \dots, 5$



Hexagone régulier

2.7.3 Le cas $n=2$, méthode cartésienne

Exemple

$z^2 = 3 + 4i$ $(*)$ on cherche $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

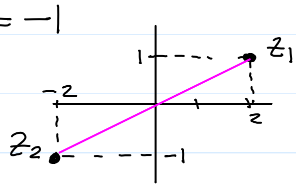
$(a+ib)^2 = 3 + 4i$ $\quad a^2 - b^2 = 3$ ①
$\qquad\qquad\qquad\qquad 2ab = 4$ ② $\Rightarrow a \neq 0$ et $b \neq 0$

$\underset{②}{\Longrightarrow}$ $\boxed{b = \frac{2}{a}}$ $\underset{①}{\Longrightarrow}$ $a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$

$\Longrightarrow (a^2)^2 - 3(a^2) - 4 = 0$ $(**)$

$\Longrightarrow (a^2 - 4)(a^2 + 1) = 0 \Longrightarrow$ $a = 2$, $b = 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a = -2$, $b = -1$

Solutions : $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 - i = -z_1$



Remarque: attention aux solutions éventuelles de (**) qui ne correspondent pas à des solutions de (*)

2.8. Théorème fondamental de l'algèbre

2.8.1. Le théorème

Tout polynôme $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ sont donnés, $a_n \neq 0$, admet dans $\mathbb{C}$ n "racines". C'est-à-dire il existe $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $p(z_k) = 0$, $k = 1, \dots, n$ et tels que l'on ait la représentation

$$\boxed{p(z) = a_n \cdot (z - z_1) \cdot \ \dots \ \cdot (z - z_n)}$$

Le cas réel: si $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, alors on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ que $\overline{p(z)} = p(\bar{z})$ (vérifier !).
Dans ce cas si $p(z_k) = 0$ on a aussi $p(\bar{z}_k) = 0$, car $p(\bar{z}_k) = \overline{p(z_k)} = \bar{0} = 0$.

Conséquence: les "racines" d'un polynôme à coefficients réels sont ou bien des nombres réels ou des paires de nombres complexes conjugués.

Tout polynôme à coefficients réels peut être factorisé dans $\mathbb{R}$ en facteurs linéaires et quadratiques.

Explication:

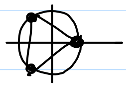
$$\underbrace{(z - z_k) \cdot (z - \bar{z}_k)}_{\text{deux facteur linéaires complexes}} = \underbrace{z^2 - (\underbrace{z_k + \bar{z}_k}_{= 2\,\mathrm{Re}(z_k) \in \mathbb{R}})\, z + \underbrace{z_k \cdot \bar{z}_k}_{= |z_k|^2 \in \mathbb{R}}}_{\text{un facteur quadratique réel.}}$$

2.8.2. Exemples

1) $p(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = (z-1)(z-1)$

2) $p(z) = z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$.

3) $p(z) = z^3 - 1 \overset{\text{dans } \mathbb{C}}{=} (z-1)\left(z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

les trois "racines" de $z^3 = 1$ 

$\underset{\text{dans } \mathbb{R}.}{=} (z-1)(z^2+z+1)$

4) $p(z) = z^4 - 1 = (z^2+1)(z^2-1) \overset{\text{dans } \mathbb{R}}{=} (z^2+1)(z+1)(z-1)$

$\underset{\text{dans } \mathbb{C}}{=} (z+i)(z-i)(z+1)(z-1)$

A propos 3), division de polynôme: (supposée connue)

$(z^3 - 1) : (z - 1) = z^2 + z + 1 \Rightarrow z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$.

$$
\begin{array}{l}
z^3 - 1 \\
\underline{z^3 - z^2} \\
z^2 - 1 \\
\underline{z^2 - z} \\
z - 1 \\
\underline{z - 1} \\
0
\end{array}
$$

":" = divise par

2.8.3. Cas général de polynômes de degré deux

Formule de Viète:

Si $p(z) = az^2 + bz + c$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ donnés,
alors

$$z_1 = \frac{-b \text{"}+\sqrt{b^2-4ac}\text{"}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b \text{"}-\sqrt{b^2-4ac}\text{"}}{2a} \quad (*)$$

sont les deux "racines" de $p(z)$, c'est-à-dire
$p(z_1) = p(z_2) = 0$ et $p(z) = a \cdot (z - z_1)(z - z_2)$.

<u>Remarque:</u> dans $(*)$ "$\pm\sqrt{b^2-4ac}$" sont par définition les deux solutions de l'équation
$z^2 = w = \underbrace{b^2 - 4ac}_{\in \mathbb{C}}$. Voir 2.7.1 et 2.7.2.