Chapitre 2

Introduction aux nombres complexes

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x^2+1 \neq 0$.

2.1. Définition du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$

Soit $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $(=: \mathbb{R}^2)$.

$(a,b), (c,d) \in X$

$\mathbb{C} := (X, +, \cdot) \longleftarrow$ sur X deux opérations $+$ et $\cdot$

$+ :$ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ le plus dans $\mathbb{R}$

$\underbrace{(a,b)+(c,d)}_{\text{le + dans } \mathbb{C}} := (a+c, b+d)$

$\cdot :$ $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(a,b)\cdot(c,d) := (a\cdot c - b\cdot d, ad+bc)$

$\mathbb{C}$ est un corps (vérifier !), appelé corps des nombres complexes

$\mathbb{C}$ n'est pas ordonné.

2.2. Représentation cartésienne

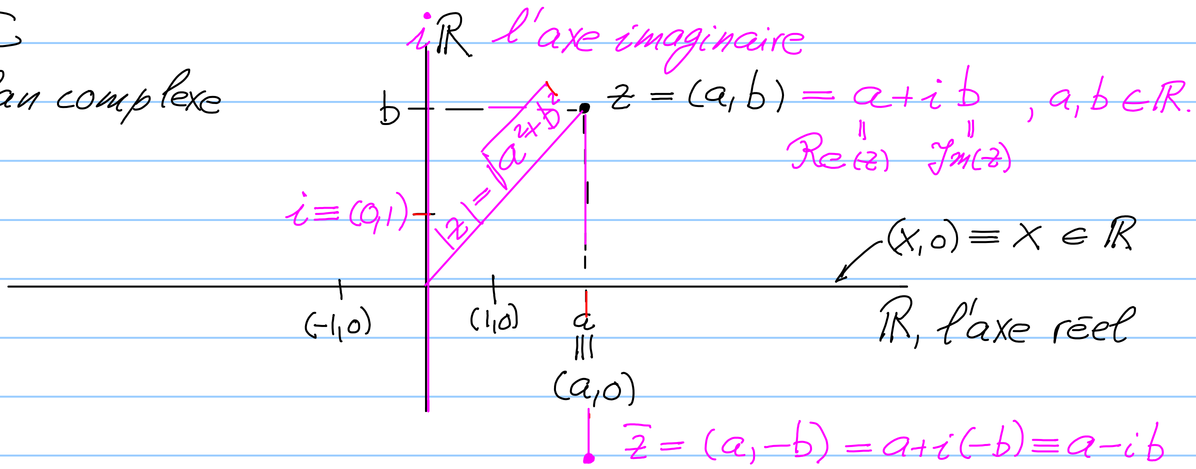
On a $(a,0)+(b,0) = (a+b, 0)$ zéro

$(a,0)\cdot(b,0) = (a\cdot b - 0\cdot 0, a\cdot 0 + 0\cdot b) = (a\cdot b, 0)$

ce qui permet d'identifier $(x,0) \in \mathbb{C}$ avec $x \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$

le plan complexe



On a $\underbrace{(0,1)}_{\equiv i}\bullet\underbrace{(0,1)}_{\equiv i}=(0\cdot 0-1\cdot 1,\ 0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)\equiv -1$

__Notation:__ $\boxed{(0,1)\equiv i}$ "unité imaginaire"

On a donc $i^2=-1$ ou encore $i^2+1=0$.

Pour tout $z=(a,b)\in\mathbb{C}$ on a l'égalité:

$$z=(a,b)=\underbrace{\underbrace{(1,0)}_{\equiv 1}\bullet\underbrace{(a,0)}_{\equiv a}}_{=(a,0)}+\underbrace{\underbrace{(0,1)}_{\equiv i}\bullet\underbrace{(b,0)}_{\equiv b}}_{=(0,b)}=1\cdot a+i\cdot b=a+ib.$$

On a donc:

$$\forall z=(a,b)\in\mathbb{C}\quad,\ \underline{a,b\in\mathbb{R}},\quad \boxed{z=a+ib}$$

La forme ou la représentation cartesienne de $z\in\mathbb{C}$.

Soit $z_1=a+ib$, $z_2=c+id$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. En utilisant les règles de calcul "habituelles" plus $\boxed{i^2=-1}$ on trouve:

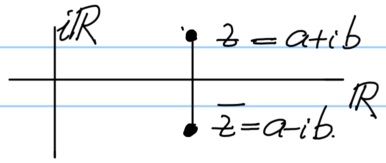
$$z_1+z_2=a+ib+c+id=(a+c)+i(b+d)$$
$$z_1\cdot z_2=(a+ib)\cdot(c+id)=(a\cdot c-b\cdot d)+i(a d+b\cdot c)$$

et on retrouve les opérations $+$ et $\bullet$ de la définition de $\mathbb{C}$.

2.3. Définitions additionnelles et propriétés élémentaires

Soit $z = a + ib$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$.

Le (complexe) conjugué de z: $\quad \bar{z} := a - ib = a + i(-b)$.



Propriétés: $\quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \bar{\bar{z}} = z$

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

Partie réelle de $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$: $\quad \mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$

Partie imaginaire de $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$: $\quad \mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$

Remarque: On a

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ \mathrm{Im}(z) &= -i \cdot \frac{1}{2}(z - \bar{z}) \end{aligned}\right\} \text{ vérifier !}$$

Valeur absolue (ou module) de $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|z| := (z \cdot \bar{z})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \left(= \sqrt{\bar{z}\,\bar{\bar{z}}} = |\bar{z}| \right)$$

En effet, si $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 - (i \cdot b)^2 = a^2 + b^2$$

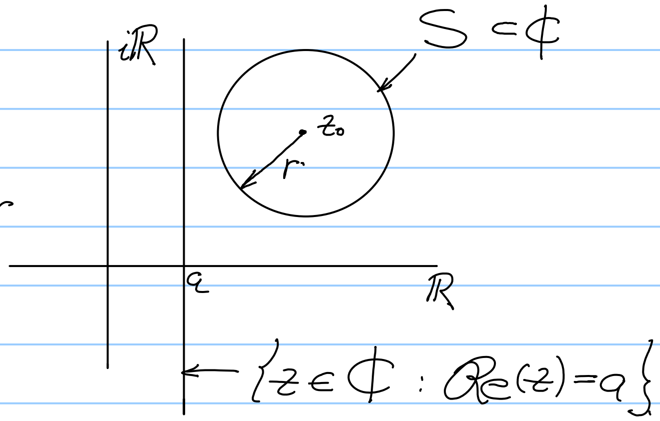
On a $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ $\quad$ vérifier !

Application à la géométrie:

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$S := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| = r\}$$

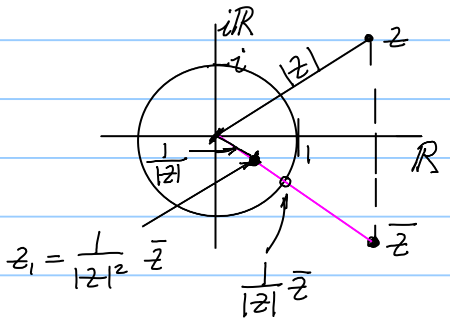
est l'ensemble des points sur le cercle de rayon r, centré en z_0.



2.4. Élément inverse pour la multiplication

Soit $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0 \equiv (0,0)$. On cherche $z_1 \in \mathbb{C}$ tel que $z \cdot z_1 = (1,0) \equiv 1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Proposition: $z_1 = \underbrace{\dfrac{1}{|z|^2}}_{\text{élément inverse de } |z|^2 \text{ dans } \mathbb{R}} \cdot \bar{z}$



En effet:

$$z \cdot z_1 = z \cdot \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \underbrace{z \cdot \bar{z}}_{= |z|^2} = \frac{1}{|z|^2} |z|^2 = 1$$

par définition de la valeur absolue.

Notation pour l'inverse: $\frac{1}{z}$, z^{-1}

Remarque: "$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{z} \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}} = \dfrac{1}{z \cdot \bar{z}} \bar{z} = \dfrac{1}{|z|^2} \bar{z}$"

Remarque: $\left| \dfrac{1}{|z|^2} \bar{z} \right| = \dfrac{1}{|z|^2} |\bar{z}| = \dfrac{1}{|z|^2} |z| = \dfrac{1}{|z|}$

(voir le dessin)

Explicitement pour $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a^2+b^2}(a-ib) = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

Du coup, pour $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$,

$$\frac{z_1}{z_2} := z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = (a+ib) \cdot \frac{1}{c^2+d^2}(c-id)$$

$$= \underbrace{\frac{ac+bd}{c^2+d^2}}_{=\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} + i\,\underbrace{\frac{bc-ad}{c^2+d^2}}_{=\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$$

2.5. Formule d'Euler et de Moivre

Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. On pose

$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) \quad \text{Formule d'Euler}}$$

On a pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = (\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$$

$$= \ldots = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2) = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

Formules d'addition d'angles pour sin et cos

Ceci permet de définir pour $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{e^z = e^{a+ib} := e^a \cdot e^{ib}}$$

exponentielle réelle

et on a la règle habituelle pour la fonction exponentielle:

$$\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}} \quad (*)$$

ainsi que $\boxed{\overline{e^{z}} = e^{\overline{z}}}$ (vérifier !).

De (*) il suit en particulier que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, z \in \mathbb{C} \quad (e^{z})^n = e^{n \cdot z}}$$

(démonstration par récurrence).

Formule de Moivre

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathbb{R}$ on a (formule de Moivre)

$$\cos(n \cdot \varphi) + i \sin(n \cdot \varphi) \underset{\text{Euler}}{=} e^{in\varphi} \underset{\text{propriété de l'exponentielle}}{=} (e^{i\varphi})^n \underset{\text{Euler}}{=} (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^n$$

$\underline{n=2}$ (formules de l'angle double)

$$\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi) = (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))^2$$

$$= (\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2) + i (2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi))$$

$\Longrightarrow$ même point du plan $\mathbb{C}$

$$\cos(2\varphi) = \cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2$$
$$\sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$$

$\underline{n=3}$

$$\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) = (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^3$$

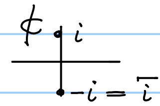
et donc :
$$\cos(3\varphi) = \cos(\varphi)^3 - 3\cos(\varphi)\sin(\varphi)^2$$
$$\sin(3\varphi) = 3\cos(\varphi)^2\sin(\varphi) - \sin(\varphi)^3$$

<u>Remarque</u>: Puisque $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ on a pour $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\varphi) &= \tfrac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin(\varphi) &= -i\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned} \Bigg\} (**)}$$

car on a $\overline{e^{i\varphi}} = e^{\overline{i\varphi}} = e^{\bar{i}\bar{\varphi}} = e^{-i\varphi}$

ainsi que $\frac{1}{i} = \frac{1}{|i|^2}\,\bar{i} = \frac{1}{1^2}(-i) = -i$



<u>Remarque</u> : On peut utiliser (**) pour généraliser la définition de sin et cos aux nombres complexes :

$$\cos(z) := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin(z) := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$