0.4 Fonctions, concepts additionnels

0.4.1. Restriction, prolongement et graphe d'une fonction

Restriction et prolongement d'une fonction

Soient deux fonctions $f : D \longrightarrow Y$ et $g : E \longrightarrow Y$ avec $E \subset D$ telles que pour, tout $x \in E$, $g(x) = f(x)$. Alors :

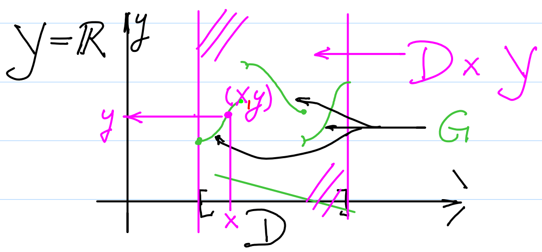
- g est appelée la restriction de f à E : $g = f|_E$.
- f est appelée un prolongement de g de E à D

Le graphe d'une fonction

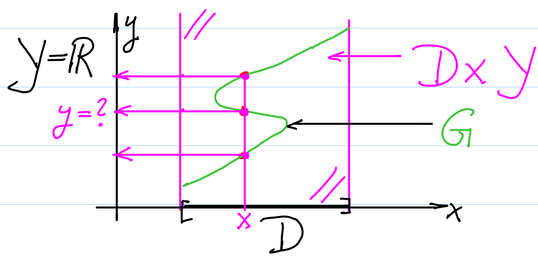
Definition le graphe (ou graphique) d'une fonction $f : D \longrightarrow Y$ est l'ensemble

$$G \equiv G_f \equiv G(f) := \{(x,y) \in D \times Y : y = f(x)\} \subset D \times Y$$

Definition d'une fonction par son graphe :
Soit $G \subset D \times Y$ (= une relation binaire) telle que pour tout $x \in D$ il existe un y et un seul tel que $(x,y) \in G$. Alors G est le graphe d'une fonction $f : D \longrightarrow Y$, qui, pour $(x,y) \in G$, associe y à x.



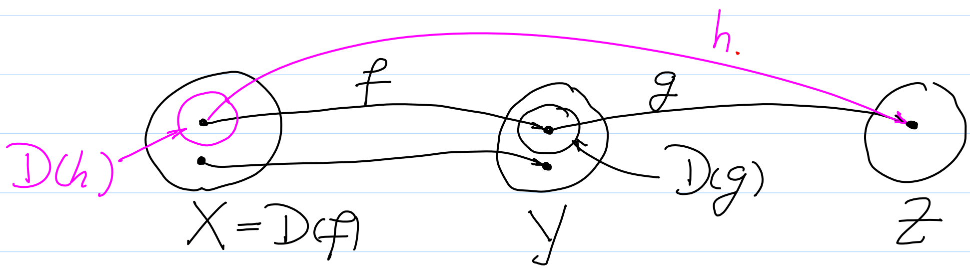
l'ensemble G est le graphe d'une fonction $f : D \longrightarrow Y$



l'ensemble G n'est pas le graphe d'une fonction.

Remarque: la relation R définie dans Exemple 0.1.2 n'est pas le graphe d'une fonction $f: X \to X$ (le vérifier !).

0.4.2. Composition de fonctions



Soit $D(h) = \{ x \in D(f) : y = f(x) \in D(g) \} \subset D(f)$.

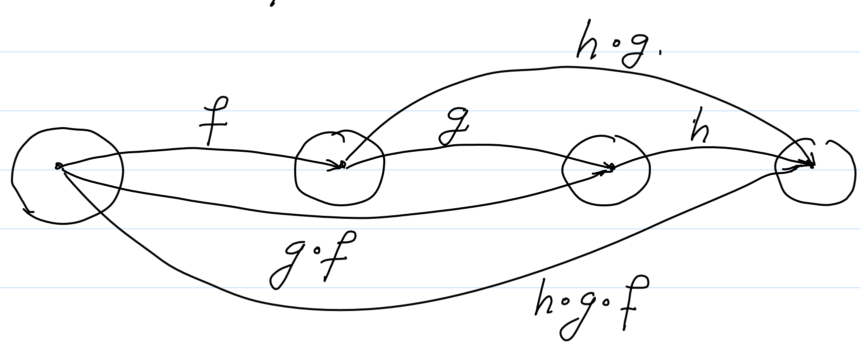
Alors, on peut définir la fonction $h: D(h) \longrightarrow Z$ par

$$h(x) := g(f(x)).$$

= "rond"

Notation on écrit $h = g \circ f$ pour la fonction définie ainsi, et on dit que h est la composition de g avec f.

Compositions multiples



Manifestement on a :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f$$

c'est-à-dire la loi de la composition de fonctions est associative.

0.5. Les entiers (les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$)

0.5.1. Propriétés de base

Les entiers naturels $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$
$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$
$$\mathbb{N} = \mathbb{N}^* \cup \{0\}$$

Nota bene : 0 est un entier naturel, 0 est pair.

Relation d'ordre (total) sur $\mathbb{N}$, notée $\leq$

Pour tout $x, y, z \in \mathbb{N}$

O1) $x \leq y$ et $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

O2) $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$

O3) on a soit $x \leq y$ soit $y \leq x$ (ordre total)

Exemples : $2 \leq 2$, $2 \leq 3$.

Notation : on écrit $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$

$x \geq y$ si $y \leq x$

$x > y$ si $y < x$

opérations : "+" : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(m, n) \longmapsto m + n$.

"." : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(m, n) \longmapsto m \cdot n$.

éléments neutres : 0 pour "+" : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n + 0 = n$

1 pour "." : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \cdot 1 = n$

On a pas des éléments "inverses" pour "+" et "." (voir la suite).

Les entiers (relatifs) $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z} = \{ \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots \}$.

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Eléments "inverses" pour "+"

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $x + y = 0$

élément neutre pour "+"

Exemples $n + (-n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

la définition de $(-n)$.

$0 + 0 = 0$, donc $-0 \equiv 0$

Notation : on écrit $2-3$ au lieu de $2+(-3)$

Remarque: $-(-3) \equiv 3$

Remarque: On a les propriétés O1) – O3) pour $\mathbb{Z}$.

Compatibilité de "+" et "·" avec $\leq$

Pour tout $x, y, z \in \mathbb{N}$ ou $x, y, z \in \mathbb{Z}$ on a :

O4) si $x \leq y$, alors $x + z \leq y + z$

O5) si $0 \leq x$ et $0 \leq y$ alors $0 \leq x \cdot y$

0.5.2. Le plus grand commun diviseur (pgcd)

Algorithme d'Euclide, algorithme de Joseph Stein

Remarque de base: Soit $a, b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b \leq a$. Si $r \in \mathbb{N}^*$ divise a et b, alors r divise $a - b$.

Démonstration $\underbrace{\frac{a}{r}}_{\in\mathbb{N}} = \underbrace{\frac{b}{r}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\frac{a-b}{r}}_{\in\mathbb{N}}$ $\Rightarrow$

r divise a r divise b $\Rightarrow$ r divise a−b.

Algorithme de J. Stein

0) $pgcd(a,b) = pgcd(b,a)$

1) $pgcd(a,b) = 2\cdot pgcd(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ si a,b pairs

2) $pgcd(a,b) = pgcd(\frac{a}{2}, b)$ si a pair, b impair

3) $pgcd(a,b) = pgcd(\frac{a-b}{2}, b)$ si a, b impairs et $a \geqslant b$.

4) $pgcd(a,0) = a$.

Exemple: $pgcd(727,7) \underset{3)}{=} pgcd(360,7) \underset{2)}{=} pgcd(180,7) =$

$\underset{2)}{=} pgcd(90,7) \underset{2)}{=} pgcd(45,7) \underset{3)}{=} pgcd(19,7) =$

$\underset{3)}{=} pgcd(6,7) \underset{2)}{=} pgcd(3,7) \underset{0)}{=} pgcd(7,3) =$

$\underset{3)}{=} pgcd(2,3) \underset{2)}{=} pgcd(1,3) \underset{0)}{=} pgcd(3,1) =$

$\underset{3)}{=} pgcd(1,1) \underset{3)}{=} pgcd(0,1) \underset{0)}{=} pgcd(1,0) \underset{4)}{=} 1$.

0.5.3 Raisonnement par récurrence (principe d'induction)

Exemple: on aimerait démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$: $P(n) \equiv$ "proposition n"

Théorème i) si $P(n_0)$ est vrai pour un $n_0 \in \mathbb{N}$ (initialisation)

ii) si pour tout $n \geq n_0$ $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (le pas d'induction)

alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq n_0$.

Dans notre exemple.

i) $n_0 = 1$: $1 = 1^2$ est vrai.

ii) $1+3+5+\dots+\underbrace{(2(n+1)-1)}_{=(2n+1)} = (n+1)^2$: $P(n+1)$

$\Leftrightarrow \underbrace{1+3+5+\dots+(2n-1)}_{=|_{P(n)}\, n^2} + (2n+1) \overset{?}{=} (n+1)^2$ est-ce que c'est égal à

est égal en utilisant $P(n)$

$\Leftrightarrow n^2 + (2n+1) \overset{?}{=} (n+1)^2$ est vrai.

Donc, pour tout $n \geq n_0 = 1$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

i) + ii) pour tout $n \geq n_0 = 1$ $P(n)$ est vrai.

0.5.4 Contre-exemple (au "théorème" sans i))

Attention! i) est indispensable !

$P(n)$: $3^{2n+4} - 2^n$ est un multiple de 7

ii) $P(n+1)$: $3^{2(n+1)+4} - 2^{n+1}$ est un multiple de 7.

$+0 = -9 \cdot 2^n + 9 \cdot 2^n$

$$\Longleftrightarrow 9\cdot(\underbrace{3^{2n+4}-2^n}_{\text{est un multiple de 7 par } P(n)}) + 2^n\underbrace{(9-2)}_{\text{un multiple de 7}} \Bigg\} \text{ un multiple de 7}$$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \geq 1$.

Mais i) : $P(1)$: $3^6 - 2 = 729 - 2 = 727$

astuce de calcul $3^6 = (3^3)^2 = 27^2 = 30\cdot 24 + 3^2 = 729$

$a^2 = (a+b)(a-b) + b^2$

Mais $\text{pgcd}(727, 7) = 1$ donc 727 pas un multiple de 7.

Donc $P(1)$ n'est pas vrai, donc $P(n)$ n'est pas démontré !

> Mais attention: il reste la possibilité logique que $P(n)$ soit vrai à partir d'un certain $n_0 > 1$.

En fait $P(n)$ est effectivement faux pour tout $n \geq 1$.
Ceci suit aussi de ii) (car $P(n+1) \Rightarrow P(n)$)
par une démonstration par l'absurde
(voir plus loin pour ce type de démonstrations)

0.6 Notations et identités

0.6.1 Les notations $\sum$ et $\prod$ (voir série 2)

a_k des nombres $k = m, \dots, n$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \geq m$

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$$

Exemples: $\sum_{k=1}^{1} a_k = a_1$, $\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2$,

$n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$

Definition (somme vide et produit vide)

si $n < m$: $\sum_{k=m}^{n} a_k := 0$, $\prod_{k=m}^{n} a_k := 1$.

Règles de calcul

Pour $l, m, n \in \mathbb{Z}$, $l \leq m \leq n$ et a_k, b_k des nombres:

$$\sum_{k=\ell}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=\ell}^{n} a_k$$

$$\left(\prod_{k=\ell}^{m} a_\ell\right) \cdot \left(\prod_{k=m+1}^{n} a_k\right) = \prod_{k=\ell}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k$$

$$\prod_{k=m}^{n} (a_k \cdot b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$$

0.6.2 Rappels (prérequis) de notations et identités

i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, $a \neq 1$

Convention: $a^{0 \,\leftarrow\, \text{zéro}} := 1$, pour tout nombre a

Démonstration de i): $(1-a)(1+a+\dots+a^n) = 1 \cancel{-a+a} \dots - a^{n+1}$

"n factoriel"

ii) $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = (n-1)!\, n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$0! := 1$

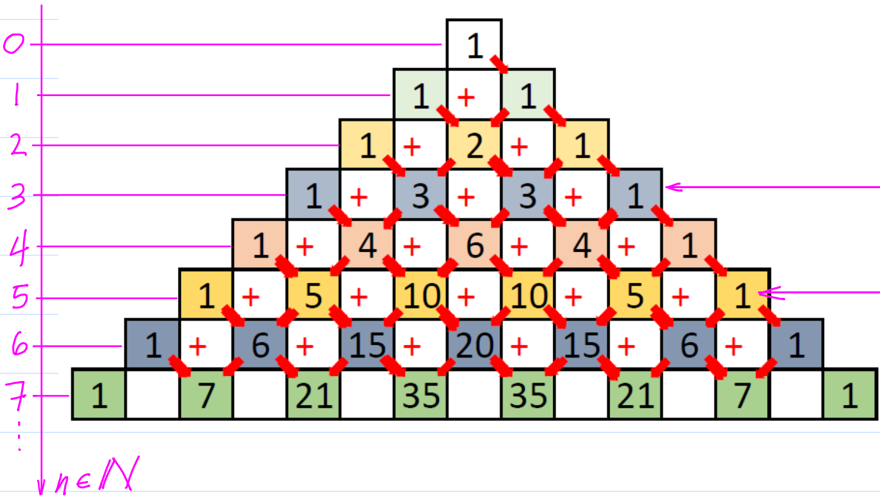
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \overset{n \geq 1}{=} \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k!} , \quad k, n \in \mathbb{N},\ k \leq n.$$

iii) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, a, b des nombres

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$(a+b)^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k} = a^n + n a^{n-1} b + \dots + b^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

Remarque (triangle de Pascal)



$\binom{3}{0}, \binom{3}{1}, \binom{3}{2}, \binom{3}{3}$

$\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5}$