0.1.2 Le produit cartésien

X, Y, Z des ensembles.

un "couple", l'ordre est important !

$$X \times Y := \{ (x,y) : x \in X, y \in Y \}$$

"produit cartésien"

Exemple: $X = \{1,2\}$, $Y = \{3,4\}$, $Z = \{5\}$

$$X \times Y = \{ (1,3), (1,4), (2,3), (2,4) \}$$

Attention: $X \times Y \neq Y \times X$ en général

Définition plus générale: (exemple, 3 ensembles) "n"

triplet, n-uplet

$$X \times Y \times Z := \{ (x,y,z) : x \in X, y \in Y, z \in Z \}$$

$$= \{ (1,3,5), (1,4,5), (2,3,5), (2,4,5) \}.$$

Attention: $X \times Y \times Z \neq (X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$

voir série 0, échauffement

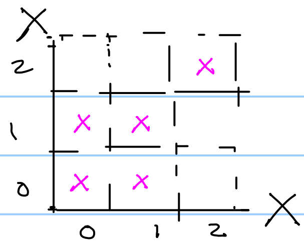
Définition: soient X et Y des ensembles. Un sous-ensemble $R \subset X \times Y$ est appelé <u>une relation binaire</u> sur X et Y.

Définition: soit X un ensemble. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelé <u>une relation</u> (ou une relation binaire) sur X.

Exemple 0.1.2. Soit, à titre d'exemple, $X = \{0,1,2\}$ et

$$R = \{ (0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0) \} \subset X \times X.$$

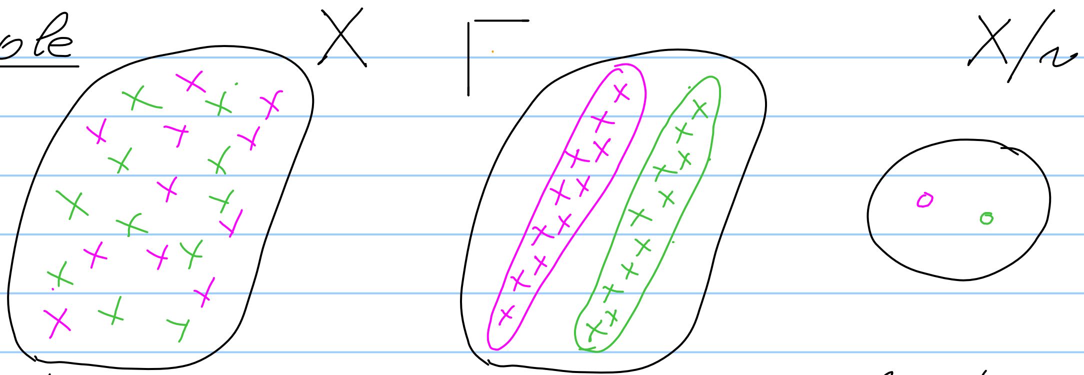
Graphiquement:



0.2 Classes d'équivalence (voir série 0)

Souvent il est utile de décomposer un ensemble X en classes d'équivalence.

Exemple



Les 22 joueurs sur un terrain de foot

image mentale

les deux équipes = "ensemble quotient".

Definition: soit X un ensemble. Un sous-ensemble $R \subset X \times X$ est appelé une relation d'équivalence sur X (et on utilise la notation $x \sim y$ pour dire que $(x,y) \in R$) si:

$\sim$ ≡ est équivalent à

R1) $\forall x \in X \,,\; x \sim x$ (R est réflexive)

R2) $\forall x,y \in X \,,\; x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (R est symétrique)

R3) $\forall x,y,z \in X \,,\; x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$ (R est transitive)

$\forall$ ≡ pour tout

$\Rightarrow$ ≡ implique

$\wedge$ ≡ "et" logique

voir série -1, partie IV

Exemple 0.1.2 ← exemple introduit dans le paragraphe 0.1.2

$X = \{0, 1, 2\}$

$R = \{(0,0), (1,1), (2,2), (0,1), (1,0)\} \subset X \times X$

(le montrer !) satisfait R1), R2) et R3).

Construction de l'ensemble quotient $X/_\sim$

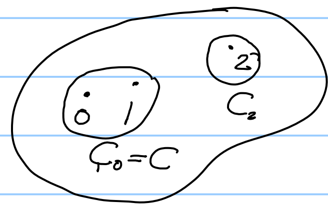
> **Définition:** Donné $x \in X$ on définit $C_x \subset X$ par
>
> $$C_x := \{y \in X : x \sim y\}.$$
>
> C_x est appelé la classe d'équivalence de x.

Remarque: $C_x = C_y$ si $x \sim y$. (pourquoi ?)

Dans l'exemple 0.1.2 $C_0 = C_1 = \{0, 1\}$, $C_2 = \{2\}$

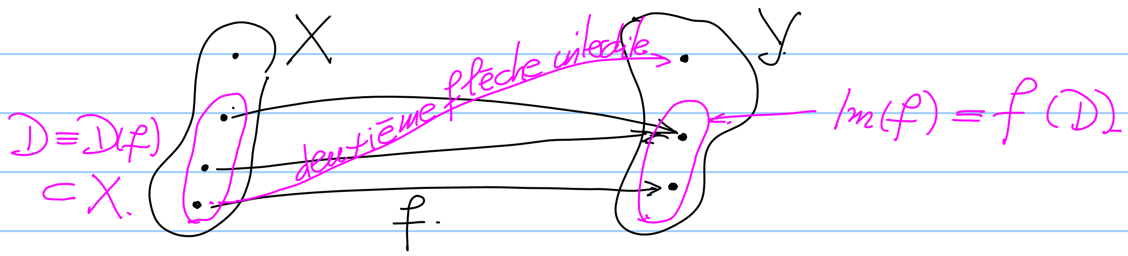
> **Définition:** l'ensemble quotient $X/_\sim$ est l'ensemble des classes d'équivalence distinctes de X.

Dans l'exemple 0.1.2 $X/_\sim = \{\{0,1\}, \{2\}\}$



0.3 Fonctions, concepts de base

0.3.1 Définitions et notations



> **Remarque:** f est spécifiée par un sous-ensemble de $D \times Y$ d'un certain type (voir plus loin).

Domaine de définition de f $\subset X$

$$D \equiv D_f \equiv D(f) := \{x \in X : \text{une flèche et une seule va de } x \in X \text{ vers un } y \in Y\}$$

Notation: $f : D \longrightarrow Y$

toujours le domaine def $\quad x \longmapsto y = f(x)$

Image de f $\subset Y$

$$Im(f) \equiv f(D) := \{y \in Y : y = f(x) \text{ pour un } x \in D\}$$

Definition Une fonction $f : D \to Y$ est appelée

- **surjective** si $Im(f) = Y$
- **injective** si $\overbrace{f(x_1) = f(x_2)}^{A} \Longrightarrow \overbrace{x_1 = x_2}^{B}$

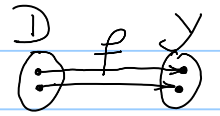
Remarque: $\underbrace{(A \Rightarrow B)}_{\text{propositon.}} \underbrace{\Longleftrightarrow}_{\text{"est équivalent"}} \underbrace{(\neg B \Rightarrow \neg A)}_{\text{la proposition contraposée}}$

$\neg \equiv$ non voir série -1, partie IV

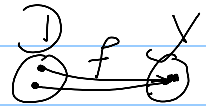
Donc: $((f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)) \Leftrightarrow ((x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)))$

0.3.2 Discussion de la surjectivité

- si $f: D \to Y$ est surjective, alors tout $y \in Y$ est image d'au moins un $x \in D$.

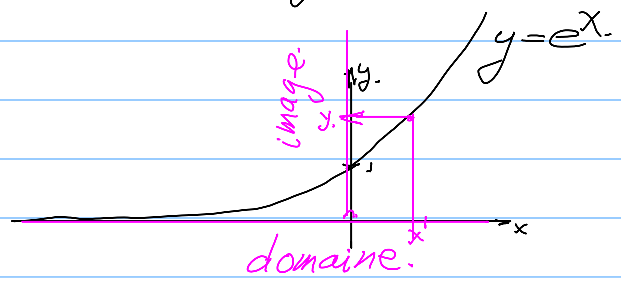


f est surjective
f est injective



f est surjective
f n'est pas injective

$$\begin{array}{cccc} & D & & Y \\ f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & y = e^{x}. \end{array}$$



$D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}$.

f est injective mais f n'est pas surjective

Remarque: toute fonction $f: D \to Y$ définit une fonction surjective $f: D \longrightarrow Im(f) \subset Y$.

$$\begin{array}{cccc} & D & & Y \\ f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}. \\ & x & \longmapsto & y = e^{x} \end{array}$$

est une fonction injective et surjective.

0.3.3 Fonctions bijectives

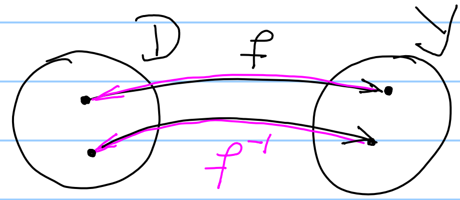
Définition: une fonction qui est injective et surjective est appelée bijective.

Remarque: toute fonction $f: D \to Y$ qui est injective définit une fonction bijective $f: D \longrightarrow Im(f) \subset Y$.

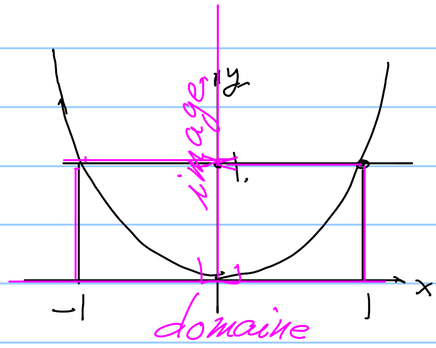
Remarque: toute fonction bijective $f: D \longrightarrow Y$ possède une fonction réciproque notée $f^{-1}: Y \longrightarrow D$. Elle associe à $y \in Y$ l'unique $x \in D$ tel que $f(x) = y$, et on a:

$\forall y \in Y \quad f(f^{-1}(y)) = y$

$\forall x \in D \quad f^{-1}(f(x)) = x$



Exemple



- $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $x \longmapsto y = x^2$

$D(f) = \mathbb{R}$

f n'est pas surjective (car $f(x) \geq 0$)
f n'est pas injective (car $f(-1) = f(1)$)

mais

- $g: \mathbb{R} \longrightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} = Im(f)$
  $x \longmapsto y = x^2$

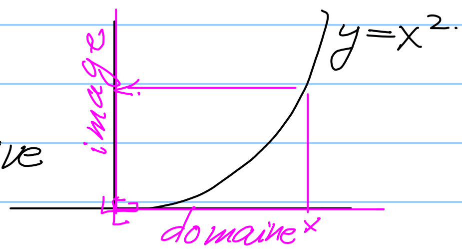
$D(g) = \mathbb{R}$

g est surjective
g n'est pas injective

et pour

- $D(h) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \subset D(g) = D(f) = \mathbb{R}$
  $h: D(h) \longrightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$
  $x \longmapsto y = x^2.$

$\left.\begin{array}{l} h \text{ est surjective} \\ h \text{ est injective} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{bijective}$



Résumé :

- pour rendre une fonction $f : D \longrightarrow Y$ surjective il faut réduire Y à $f(D) \equiv \mathrm{Im}(f) \subset Y$.

- pour rendre une fonction $f : D \longrightarrow Y$ injective il faut réduire le domaine de définition d'une manière adéquate.

- toute fonction $f : D \longrightarrow Y$ qui est bijective possède une fonction réciproque $f^{-1} : Y \longrightarrow D$.