12.7. Intégration des fonctions rationnelles

1) Décomposition de $q(x)$ en facteurs réels irréductibles

Exemples:

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$
$$x^2+1$$
$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$
$$x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$$
$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$
$$x^4+1 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

voir le chapitre des nombres complexes

2) Décomposition de $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ en éléments simples

Exemple: $$f(x) = \frac{2x^3}{x^4-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma x+\delta}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow 2x^3 = \alpha(x+1)(x^2+1) + \beta(x-1)(x^2+1) + (\gamma x+\delta)(x^2-1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & 2 = \alpha+\beta+\gamma \\ x^2: & 0 = \alpha-\beta+\delta \\ x: & 0 = \alpha+\beta-\gamma \\ 1: & 0 = \alpha-\beta-\delta \end{array}\right\}$$

algèbre linéaire

$\alpha = \beta = \frac{1}{2}, \; \gamma = 1, \; \delta = 0$

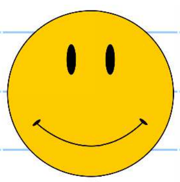
3) Intégration des éléments simples

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2\cdot x}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(|(x-1)(x+1)(x^2+1)|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(|x^4-1|) + C$$



En fait

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \text{avec } g(x) = x^4 - 1$$

$$\text{donc } \int f(x)\,dx = \frac{1}{2} \ln(|g(x)|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln(|x^4 - 1|) + C$$

12.8. Le cas général

12.8.1. Préparation

Soit $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ avec p, q des polynômes
avec degré p < degré q

Remarque: si degré $p \geq$ degré q on commence par la division de p par q avec reste:

Exemple: $$\frac{x^3+1}{x^2+1} = x + \frac{-x+1}{x^2+1}.$$

Soit donc degré p < degré q.

1) factorisation de $q(x)$ (en facteurs irréductibles)

$$q(x) = (\quad)\cdot(\quad)\cdot(\quad)(\quad)$$

12.8.2. Décomposition

2) décomposition en éléments simples

$$f(x) = \frac{p(x)}{(\quad)(\quad)(\quad)} = \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad} + \dots + \underline{\quad\quad}$$

facteur dans q. | éléments simples correspondants

i) $(x-a)$ $\qquad \dfrac{\alpha}{x-a}$

$(x-a)^2$ $\qquad \dfrac{\alpha_1}{x-a} + \dfrac{\alpha_2}{(x-a)^2}$

ii) $(x-a)^m$, $m=2,3,\dots$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{(x-a)^k}$.

iii) x^2+bx+c ← zéros complexes conjugés $\qquad \dfrac{\gamma x+\delta}{x^2+bx+c}$

FACULTATIF

iv) $(x^2+bx+c)^m$, $m=2,3,\dots$ $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\gamma_k x+\delta_k}{(x^2+bx+c)^k}$

puis il faut remettre sur le même dénominateur, comparer les puissances, et utiliser l'algèbre linéaire pour déterminer les coéfficients α_k γ_k δ_k

12.8.3 Intégration.

3) Intégration des éléments simples

i) $$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln(|x-a|) + C$$

ii) $$\int \frac{1}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{1}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C \quad, k \geq 2.$$

iii) $$\int \frac{\gamma x+\delta}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{\gamma}{2}(2x+b) + \delta - \frac{1}{2}\gamma b}{x^2+bx+c}\,dx$$

$$= \frac{\gamma}{2}\ln(|x^2+bx+c|) + (\delta - \tfrac{1}{2}\gamma b)\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$$

$$x^2 + bx + c = \left(x + \tfrac{1}{2}b\right)^2 + \underbrace{c - \frac{b^2}{4}}_{= -\Delta > 0\ !}$$

sinon on peut factoriser x^2+bx+c.

on pose $x = \varphi(u) = -\frac{1}{2}b + \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}\, u$.

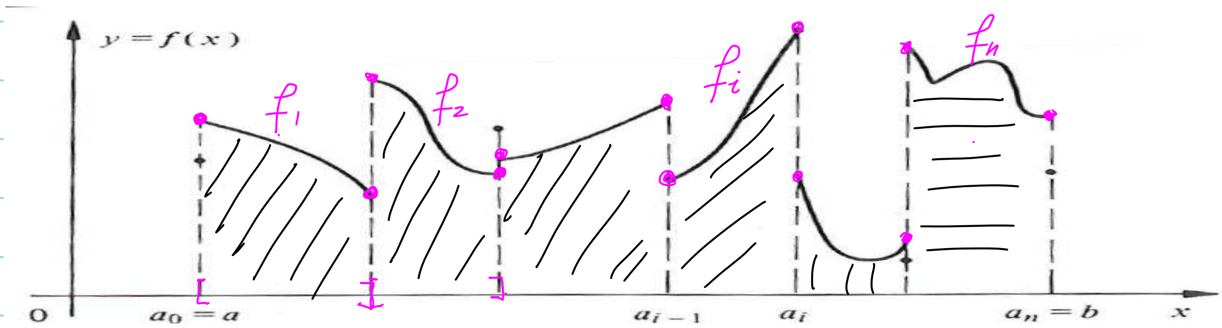
$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \boxed{\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}} \underbrace{\int \frac{1}{u^2+1}\,du}_{\text{en } u = \varphi^{-1}(x)}$$

$\varphi'(u) \rightarrow \dfrac{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}{c-\frac{b^2}{4}}$

$$= \frac{\cancel{1}}{2} \ln\left(|x^2+bx+c|\right) + \frac{\delta - \frac{1}{2}\cancel{\gamma} b}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}b}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right) + C$$

12.3. Intégration des fonctions continues par morceaux

Définition une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a<b$ est dite continue par morceaux, s'il existe une subdivision $\sigma = \{a_0, \dots, a_n\}$ de $[a,b]$ et n fonctions continues $f_i : [a_{i-1}, a_i] \to \mathbb{R}$, $i = 1 \dots n$, telles que $f_i(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a_{i-1}, a_i[$, $i = 1, \dots, n$.

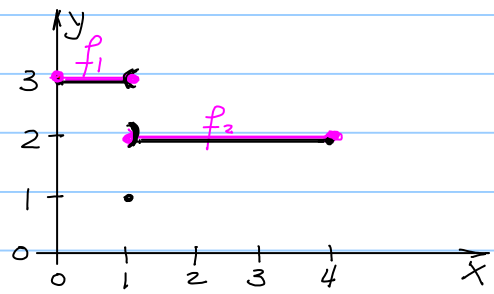


Définition Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_i(x)\,dx$$

Exemple:

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \leq 4 \end{cases}$$



$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 3 \cdot dx + \int_1^4 2\,dx = 3 + 6 = 9.$$

12.1. Intégration d'un développement limité

12.1.1 Intégration d'une fonction $C^n(\mathbb{R})$

Proposition Soit $f \in C^n(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et le développement limité

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \\ + (x-a)^n \cdot \varepsilon_1(x)$$

continue sur $\mathbb{R}$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon_1(x) = 0$. Alors

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt =$$

$$= f(a)(x-a) + \frac{1}{2} f'(a)(x-a)^2 + \dots + \\ + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n+1} + (x-a)^{n+1} \varepsilon_2(x)$$

continue sur $\mathbb{R}$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon_2(x) = 0$.

Démonstration

Pour $x > a$ on a par le théorème de la moyenne généralisé que

$$\int_a^x (t-a)^n \varepsilon_1(t)\,dt = \varepsilon_1(u) \int_a^x (t-a)^n dt = \frac{\varepsilon_1(u)}{n+1} (x-a)^{n+1}$$

avec $u \in]a, x[$ ($u \equiv u(x)$ dépend de x) et on obtient que

$$\varepsilon_2(x) = \frac{1}{n+1} \varepsilon_1(u(x)) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Il suffit donc d'intégrer terme par terme le développement limité de f pour trouver le résultat. L'argument est analogue pour $x < a$.

12.1.2. Exemple

Soit $F(x) = \int_0^x \underbrace{\sin(\cos(t))}_{\text{une fonction paire}}\, dt \quad \in C^\infty(\mathbb{R})$, impaire

Calculer le $\underbrace{\text{développement limité d'ordre 5}}_{=:\, DL_5}$ de F autour de zéro.

On a besoin du DL_4 de $f(t) = \sin(\cos(t))$ autour de zéro.

i) $\underbrace{\cos(t)}_{\equiv\, X} = 1 \underbrace{- \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t)}_{\equiv\, T}$, $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

et $T \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow 0$.

ii) il nous faut le DL_2 de $\sin(X)$ autour de $1 = \cos(0)$
(car $\underline{T \sim t^2}$ pour t proche de zéro). On a

$$\sin(X) = \sin(1) + \cos(1)\,(X-1) - \frac{1}{2}\sin(1)\,(X-1)^2 + (X-1)^2 \cdot \varepsilon(X)$$

où $\lim_{X\to 1} \varepsilon(X) = 0$

iii) $f(t) = \sin(1) + \cos(1)\,T - \frac{1}{2}\sin(1)\,T^2 + T^2\varepsilon(T)$

où $\lim_{T\to 0} \varepsilon(T) = 0$. Donc

$$f(t) = \sin(1) + \cos(1)\left(-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + t^4\varepsilon(t)\right) - \frac{1}{2}\sin(1)\left(-\frac{1}{2}t^2 + t^2\varepsilon(t)\right)^2 + t^4\varepsilon(t)$$

$$= \sin(1) - \frac{1}{2}\cos(1)\,t^2 + \left(\frac{1}{24}\cos(1) - \frac{1}{8}\sin(1)\right)t^4 + t^4\varepsilon(t)$$

où $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$

iv) $F(x) = \sin(1)\cdot x - \frac{1}{6}\cos(1)\,x^3 + \left(\frac{1}{120}\cos(1) - \frac{1}{40}\sin(1)\right)x^5 + x^5\varepsilon(x)$

où $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

12.2 Intégration des séries entières

Théorème une série entière peut être intégrée terme par terme. Soit

$(x-a)^0 \equiv 1$ par convention

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, (x-a)^k = a_0 + a_1 (x-a) + \ldots$$

($a_k \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ sont donnés) avec un rayon de convergence $r > 0$ ($r \in \mathbb{R}$ ou $r = +\infty$). Alors

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{k+1} (x-a)^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \frac{1}{k} (x-a)^k$$

et le rayon de convergence de la série pour F est r.

Exemple:

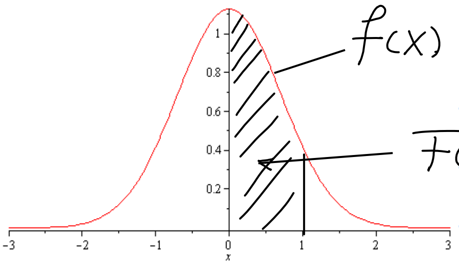
$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Soit $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k x^{2k}$

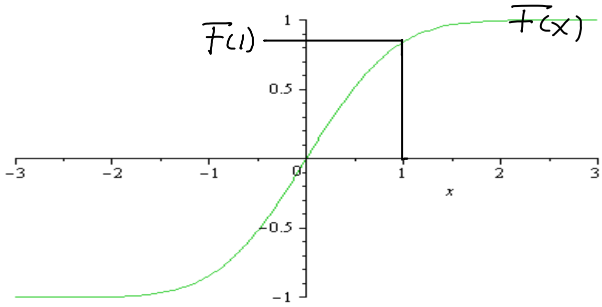
Alors $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

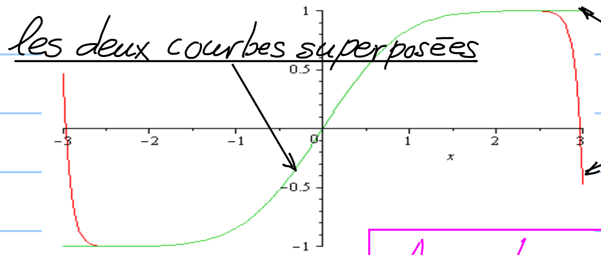
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

$$=: \operatorname{erf}(x)$$



$$F(1) = \int_0^1 f(t)\,dt$$





$$\sum_{k=0}^{37} \frac{1}{k!}\,\frac{1}{2k+1}\,(-1)^k\,x^{2k+1}$$

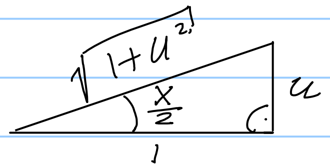
$$\boxed{\text{A noter que } \lim_{x\to\infty} \mathrm{erf}(x) = 1}$$

<u>De retour à 11.7.2</u> (changement de variables).

A utiliser en dernier recours.

$$F(x) = \int \frac{1}{\cos(x) - \sin(x) + 1}\, dx, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

$$x = \varphi(u) = 2 \cdot \arctan(u)$$



$$\cos(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1$$

$$\sin(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2u}{1+u^2}.$$

$$\varphi'(u) = \frac{2}{1+u^2}.$$

$$\underbrace{\frac{1}{\frac{2}{1+u^2} - 1 + \frac{2u}{1+u^2} + 1} \quad \frac{2}{1+u^2}}$$

$$G(u) = \int \frac{1}{1-u}\, du = -\ln(|1-u|) + C$$

$$F(x) = -\ln\left(\left|1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + C.$$