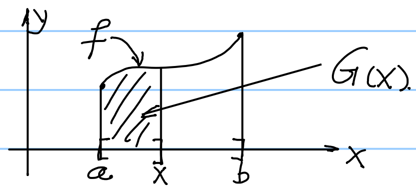
11.5 Théorème fondamental du calcul intégral

11.5.1. Enoncé du théorème

<u>Théorème:</u> soit $f \in C^{\circ}([a,b])$, $a<b$. Alors

i) la fonction $G :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$



est une primitive de f.

ii) si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

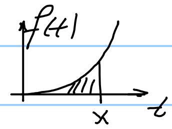
<u>Remarque:</u> par le théorème de la moyenne, puisque $f \in C^{\circ}([a,b])$ (intervalle fermé) est une fonction bornée, G et par conséquence F peuvent être prolongées par continuité à $[a,b]$. En particulier on a $G(a) = \lim_{x \to a+} G(x) = 0$ et

$$G(b) = \lim_{x \to b-} G(x) = \int_a^b f(t)\,dt$$

<u>Notation:</u> on écrira $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$

11.5.2 Exemple

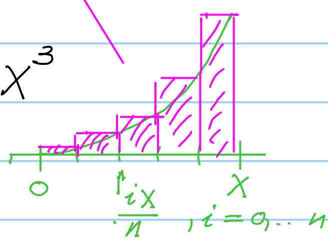
$f(x) = x^2$ sur $[0,1]$ (à titre d'exemple)

$$G(x) = \int_0^x f(t)\,dt =$$  $$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x}{n} i\right) \frac{x}{n} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x}{n}\right)^2 i^2 = x^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \ldots = x^3 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3} x^3$$

démonstration par récurrence.



et on a que $G'(x) = x^2 = f(x)$ sur $[0,1]$.

11.5.3. Démonstration du théorème

i) Soit $x \in]a,b[$. Alors

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \left(\cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} \right) \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} f(u) \cdot h \right) =$$

par le théorème de la moyenne

$$\exists u \in \begin{cases}]x, x+h[, & \text{si } h > 0, \\ ]x+h, x[, & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(u) = f(x)$$

car $u \to x$ lorsque $h \to 0$ et f est continue en x.

ii) Soit F une primitive de f. Puisque par i) G est aussi une primitive de f, il existe (voir 11.1.2) une constante $C \in \mathbb{R}$, telle que $\forall x \in]a,b[$, $F(x) = G(x) + C$ et par le prolongement par continuité en a et b, que

$$\forall x \in [a,b] \quad , \quad F(x) = G(x) + C \ ;$$

en $x = a$: $F(a) = G(a) + C = 0 + C \Rightarrow C = F(a)$.

en $x = b$: $F(b) = \underbrace{G(b)}_{\int_a^b f(t)\,dt} + C = G(b) + F(a)$

d'où $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

$\square$

11.5.4 Surjectivité de l'application dérivée

Remarque: pour f continue sur $]a,b[$ la fonction $G :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

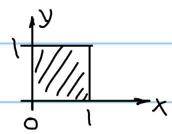
$$G(x) = \int_c^x f(t)\,dt \text{ est une primitive de } f$$

pour tout choix de $c \in]a,b[$. L'application $\mathcal{D} : C^1(]a,b[) \longrightarrow C^0(]a,b[)$, $F \longmapsto \mathcal{D}(F) = F'$ est donc surjective.

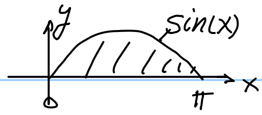
11.6. Premiers exemples

11.6.1. Calculs d'intégrales

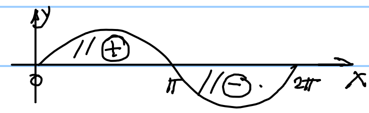
1) $\int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1 - 0 = 1$



2) $\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi} = -(-1) - (-(1)) = 2$



3) $\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} = -1 - (-1) = 0$



4) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x) + C \quad , C \in \mathbb{R}$

5) $\int \frac{\sinh(x)}{e^x+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+1} \frac{e^{-x}}{e^{-x}} dx -$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1-(e^{-x})^2}{1+e^{-x}} dx = \frac{1}{2}\int (1-e^{-x})\, dx = \frac{1}{2}(x + e^{-x}) + C$

11.7 Méthodes d'intégration

11.7.1. Intégration immédiate

Voir le tableau

1) $a > 0$, $a \neq 1$ $\quad \int a^x\, dx = \int e^{\ln(a)\cdot x}\, dx$

$= \frac{1}{\ln(a)} e^{\ln(a)\cdot x} + C = a^x \frac{1}{\ln(a)} + C$

2) $\int f(x)\cdot f'(x)\, dx = \frac{1}{2} f(x)^2 + C$

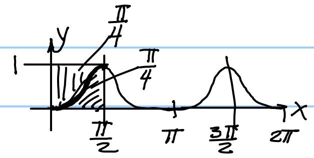
exemple: $\int \sin(x)\cdot\cos(x)\, dx = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x)^2 + C \\ -\frac{1}{2}\cos(x)^2 + C \end{cases}$

3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$

exemple: $\int \tan(x)\, dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx$

$= -\ln(|\cos(x)|) + C$

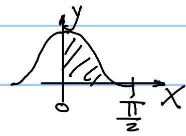
4) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1-\cos(2x))\,dx$$



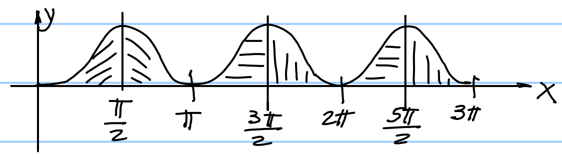
$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

4') $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin(x)^2)\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



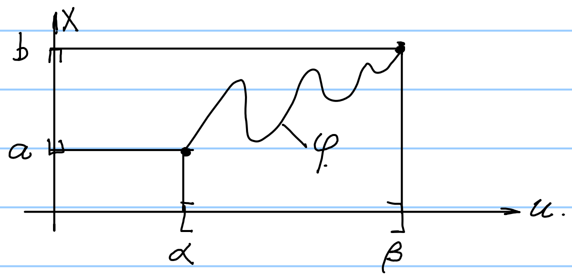
5) $$\int_0^{n\cdot\frac{\pi}{2}} \sin(x)^2\,dx = n\cdot\frac{\pi}{4}$$



11.7.2. Intégration par changement de variable

Théorème: Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$.
Soit $\varphi: [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$, $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$.
En plus on demande que

$$\boxed{\varphi(\alpha) = a \quad , \quad \varphi(\beta) = b}$$



Alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\,du}$$

Démonstration

Soit F une primitive de f sur $[a,b]$. Alors, la fonction $G(u) = F(\varphi(u))$ est une primitive de $f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$ sur $[\alpha,\beta]$ car (dérivation en chaîne):

$$G'(u) = F'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) = f(\varphi(u))\,\varphi'(u)$$

Donc $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = [G(u)]_\alpha^\beta$

$$= G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

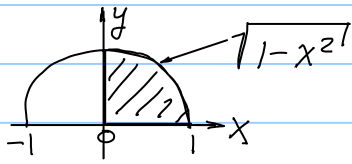
$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Remarque: si φ est bijective, alors

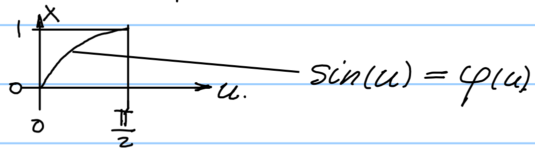
$$F(x) = F(\varphi(\varphi^{-1}(x))) = G(\varphi^{-1}(x))$$

11.7.3. Exemples

1) $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad = \frac{\pi}{4}$



On pose $\quad x = \varphi(u) = \sin(u)$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin(u)^2}}_{\substack{=|\cos(u)| \\ = \cos(u),\ u \in [0, \frac{\pi}{2}]}} \cdot \cos(u)\, du$$

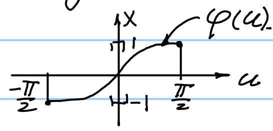
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\, du = \frac{\pi}{4}$$

voir plus haut

2) <u>cas d'une intégrale indéfinie (voir la remarque)</u>

$F(x) = \int \sqrt{1-x^2}\, dx \qquad$ (on cherche une primitive)

$x = \varphi(u) = \sin(u) \quad , \underset{\substack{\Psi \\ u}}{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \longrightarrow \underset{\substack{\Psi \\ x}}{[-1, 1]}$ <u>bijective</u>



$$G(u) = \int \sqrt{1-\sin(u)^2} \cdot \cos(u)\, du$$

$$= \int \cos(u)^2\, du =$$

ici on utilise que
$\cos(u) \geq 0$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$= \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2u))\, du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \underbrace{\sin(2u)}_{\substack{\| \\ 2 \sin(u) \cdot \cos(u) \\ \| \\ \sqrt{1-\sin(u)^2}}} + C$$

Donc $F(x) = G(\varphi^{-1}(x)) = G(\arcsin(x))$

$$= \frac{1}{2} \arcsin(x) + \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{1-x^2} + C \qquad , x \in [-1, 1]$$

11.7.4. Intégration par parties

<u>Théorème</u> Soient $f, g \in C^1([a,b])$. Alors
$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

<u>Remarque:</u> en pratique on écrit l'identité plutôt comme
$$\boxed{\int_a^b \underset{\uparrow}{f}(x) \cdot \underset{\downarrow}{g}(x)\, dx = [F(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx}$$
avec $f \in C^0([a,b])$, $g \in C^1([a,b])$ et F une primitive de f. (les $\uparrow\downarrow$ sont une aide mnémotechnique)

<u>Démonstration du théorème</u>

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) \qquad \Big| \int_a^b \_\_\, dx$$
et donc
$$[f(x) \cdot g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

Cas d'une intégrale indéfinie
$$\int \underset{\uparrow}{f}(x)\, \underset{\downarrow}{g}(x)\, dx = F(x)\, g(x) - \int F(x)\, g'(x)\, dx$$

11.7.5. Exemples

1) $$\int_0^1 e^x \cdot x\,dx = \left[e^x \cdot x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1\,dx$$
$$= e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

2) $$\int_0^1 e^x x^2\,dx = \left[e^x \cdot x^2\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (2x)\,dx$$
$$= e - 2 \cdot \int_0^1 e^x x\,dx = e - 2$$

3) $$\int \ln(x)\,dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$$
$$= x \cdot \ln(x) - x + C, \quad x>0.$$

11.7.6 Intégration par récurrence

$$\boxed{I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.}$$

$$I_0 = x + C$$
$$I_1 = \arctan(x) + C$$

$$I_n \underset{n\in\mathbb{N}^*}{=\!=} \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$

$$= x \cdot \frac{1}{(x^2+1)^n} + \underbrace{\int x \frac{2n \cdot x}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx}_{= 2n \int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx.}$$

$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}.$$

Donc

$$\boxed{I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n, \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

<u>Exemple:</u> $I_2 = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}$