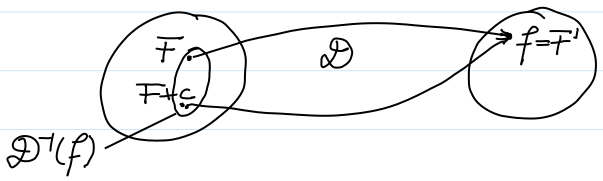
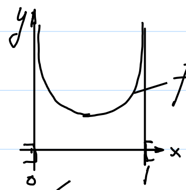
Chapitre II

Intégrales indéfinies et définies

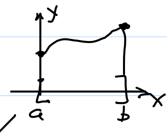
II.1 L'intégrale indéfinie

II.1.1. Motivation





$f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$



$$\begin{aligned}
\mathcal{D}: \quad C^1(]a,b[) &\longrightarrow C^0(]a,b[) \supset C^0([a,b]), \quad a<b. \\
F &\longmapsto \mathcal{D}(F) = F' \\
\mathcal{D}^{-1}(f) &\longleftarrow f
\end{aligned}$$

$\mathcal{D}$ n'est pas injective car $\mathcal{D}(F+c) = F'$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathcal{D}^{-1}(f) := \{ F \in C^1(]a,b[) : F' = f \in C^0(]a,b[) \}}$$

II.1.2. Définition de l'intégrale indéfinie

Définition soit $f \in C^0(]a,b[)$, $a<b$. Une primitive de f est une fonction $F \in C^1(]a,b[)$ telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]a,b[$.

Remarque si $f \in C^0([a,b])$, $a<b$ alors $F \in C^1([a,b])$, car F est continue sur $[a,b]$ (voir plus loin) et par la continuité de f sur $[a,b]$ on trouve.

$$\lim_{x \to a+} F'(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \underset{\text{théorème 8.2}}{=\!=\!=} F'(a)$$

$$\lim_{x \to b-} F'(x) = \lim_{x \to b-} f(x) = f(b) \underset{\text{théorème 8.2}}{=\!=\!=} F'(b)$$

Remarque: deux primitives d'une fonction donnée ne diffèrent que d'une constante. (voir 5.9.2, corollaire 1)

Attention! C'est ici que l'on a utilisé que les fonctions f sont définies sur un intervalle

Definition: on appelle intégrale indéfinie de f l'ensemble des primitives de f : $\mathcal{D}^{-1}(f)$

Notation pour $\mathcal{D}^{-1}(f)$: $\boxed{\int f(x)\,dx}$ ou encore $\int^x f(t)\,dt$

Remarque: l'application $\mathcal{D}: C^1(]a,b[) \to C^0(]a,b[)$ est linéaire : $\mathcal{D}(\alpha F+\beta G) = \alpha\mathcal{D}(F)+\beta\mathcal{D}(G), \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $F, G \in C^1(]a,b[)$. $\mathcal{D}^{-1}$ est aussi linéaire, modulo $C\in\mathbb{R}$: $\int \alpha f(x)+\beta g(x)\,dx = \alpha.\int f(x)\,dx+\beta\int g(x)\,dx$

11.1.3. Exemples à connaître

Voir le tableau de la section 7.9

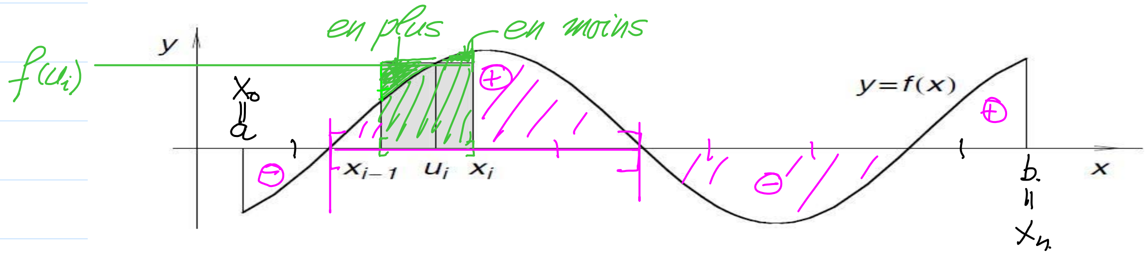
$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$	$n\neq -1$, $C\in\mathbb{R}$ ($n\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$)
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)+C$	$C\in\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)+C$	$C\in\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)+C$	$C\in\mathbb{R}$
e^x	e^x+C	$C\in\mathbb{R}$

$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x + C$	$, x>0, C \in \mathbb{R}$
$f(x) \cdot f'(x)$	$\frac{1}{2} f(x)^2 + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x)\rvert) + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\frac{f'(x)}{1+f(x)^2}$	$\arctan(f(x)) + C$	$C \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$C \in \mathbb{R}$

II.2. L'intégrale définie

II.2.1. Sommes de Riemann

Soit $f \in C^0([a,b])$, $a < b$.



Définition soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une suite finie (x_i), $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ est appelée une subdivision de l'intervalle $[a,b]$.

Notation: on écrira $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ pour (l'ensemble des points d') une subdivision de $[a,b]$.

Définition soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivison de $[a,b]$
$u_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Alors on appelle

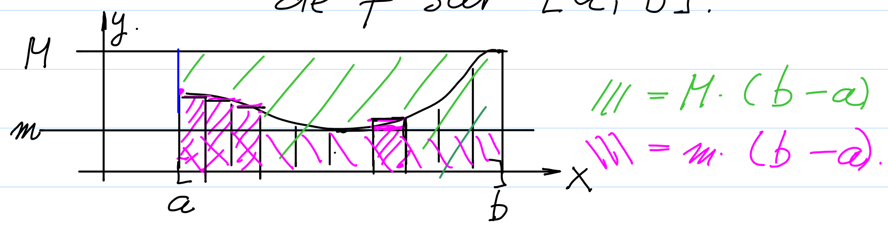
$$S(\sigma, u_1 \dots u_n) := \sum_{i=1}^{n} f(u_i)(x_i - x_{i-1})$$

la somme de Riemann de f pour la subdivision σ et le choix des $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \dots n$.

Remarque: si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, alors la somme de Riemann est une approximation de la surface sous le graphe de f.

II.2.2. Sommes inférieures et supérieures

Remarque: puisque la fonction f est continue sur $[a,b]$ on a $m(b-a) \leq S(\sigma, u_1 \dots u_n) \leq M \cdot (b-a)$, où m et M sont le minimum et le maximum de f sur $[a,b]$.



Remarque: puisque f est continue sur $[a,b]$, f est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,\dots,n$ et f admet un minimum m_i et un maximum M_i sur $[x_{i-1}, x_i]$ et

$$m(b-a) \leq \underline{S}(\sigma) \leq S(\sigma, u_1 \dots u_n) \leq \bar{S}(\sigma) \leq M(b-a)$$

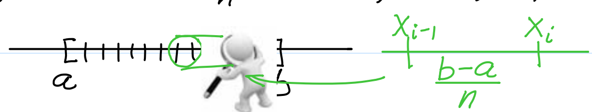
où :

$$\underline{S}(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}), \quad \bar{S}(\sigma) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Définition: donné une subdivision $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ on définit $\Delta x \equiv \Delta x(\sigma) := \text{maximum}\{x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ le "pas" de la subdivision.

Exemple: découpage régulier

On définit $x_i = a + \dfrac{b-a}{n} i$, $i=0,\dots,n$ avec $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.



$n=1 \quad \sigma_1 = \{x_0 = a, \ x_1 = b\}$

$n=2 \quad \sigma_2 = \left\{x_0 = a, \ x_1 = a + \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{a+b}{2}, \ x_2 = b\right\}$

$n = 2^k, \quad \sigma_k = \left\{ x_i = a + \dfrac{b-a}{2^k} i, \ i = 0, \dots, n = 2^k \right\}$.

et on a $\sigma_{k+1} \supset \sigma_k$.

11.2.3. Définition de l'intégrale définie

Théorème/Définition (intégrale définie de f sur $[a,b]$)

Soit $f \in C^0([a,b])$, $\sigma_k = \{x_0, \dots, x_{n(k)}\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ une suite de subdivisions telle que $\forall k$, $\sigma_{k+1} \supset \sigma_k$ et $\lim_{k\to\infty} \Delta x(\sigma_k) = 0$. Alors la suite $\underline{S}(\sigma_k)$ est croissante, la suite $\overline{S}(\sigma_k)$ est décroissante et puisque $\forall k$, $\underline{S}(\sigma_k) \leq \overline{S}(\sigma_k)$ les deux suites admettent des limites $\underline{S} = \lim_{k\to\infty} \underline{S}(\sigma_k)$ et $\overline{S} = \lim_{k\to\infty} \overline{S}(\sigma_k)$. Ces limites sont indépendantes du choix de la suite des subdivisions et $\underline{S} = \overline{S} =: S = \lim_{k\to\infty} S(\sigma_k, u_1, \dots, u_{n(k)})$, où pour chaque k, le choix des $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$ est arbitraire. Le nombre S est appelé intégral définie de f sur $[a,b]$.

Explications

concept pas introduit dans ce cours

La continuité (uniforme) de f sur $[a,b]$ implique que $\forall \varepsilon > 0$ il existe k_0 tel que $\forall k \geq k_0$, $0 \leq M_i - m_i \leq \varepsilon$, $i = 1 \dots n(k)$. Ceci implique

$$0 \leq \overline{S}(\sigma_k) - \underline{S}(\sigma_k) \leq \sum_{i=1}^{n(k)} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon\,(b-a).$$

d'où $\overline{S} = \underline{S}$. L'indépendance de la suite des subdivisions est une conséquence du fait que si σ_k^1 et σ_k^2 sont deux suites de subdivisions alors $\sigma_k = \sigma_k^1 \cup \sigma_k^2$ en est aussi une et $\underline{S}(\sigma_k^1) \leq \underline{S}(\sigma_k) \leq \overline{S}(\sigma_k) \leq \overline{S}(\sigma_k^2)$.

Notation: on écrit $(S =) \int_a^b f(x)\,dx$ pour l'intégrale définie de f sur $[a,b]$.

Remarque: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(\xi)\,d\xi$ (le choix du nom de la variable d'intégration est irrelevant)

Définition: $b = a$: $\int_a^a f(x)\,dx := 0$

$b < a$: $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$

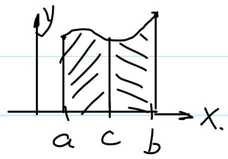
II.3. Propriétés des intégrales définies

Soit $f, g \in C^0([a,b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) $\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta\, g(x))\,dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$

linéarité de l'intégrale

ii) soit $a < c < b$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$ subdivision du domaine

iii) si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$ alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Remarque: puisque $\forall x \in [a,b]$

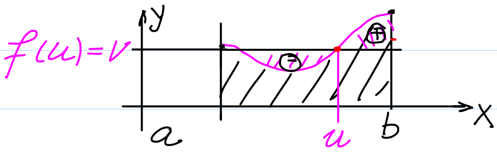
$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

on obtient de iii) en particulier que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

11.4. Théorème de la moyenne

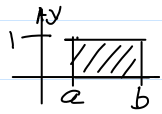
11.4.1. Enoncé du théorème



$\oplus + \ominus = 0$

Théorème: soit $f: D \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$ (c.-à-d. $f \in C^0([a,b])$). Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(u)\,(b-a)} = f(u) \cdot \int_a^b 1 \cdot dx$$



Remarque: $f(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ = la valeur moyenne de f sur $[a,b]$