10.6.3. Démonstration et remarques

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k (x-a)^k}_{=: b_k \in \mathbb{R}}$$

et par les critères dans 4.9 on a convergence absolue si

$$q = \lim_{k\to\infty} |b_k|^{\frac{1}{k}} = |x-a| \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}_{=\frac{1}{r}} < 1 \qquad \text{(Cauchy)}$$

$$q = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = |x-a| \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}_{=\frac{1}{r}} < 1 \qquad \text{(d'Alembert)}$$

$$q = \limsup_{k\to\infty} |b_k|^{\frac{1}{k}} = |x-a| \cdot \underbrace{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}_{=\frac{1}{r}} < 1 \qquad \text{(critère du limsup)}$$

ce qui est le cas si $|x-a| < r$. De même la série diverge si $q > 1$, ce qui est le cas si $|x-a| > r$. $\square$

Remarques:
- le théorème ne dit rien sur la convergence de la série pour $x = a+r$ et $x = a-r$. <u>A contrôler séparément !</u>
- si $r = +\infty$ la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- si $r = 0$ la série ne converge que pour $x = a$ et $s = a_0$

10.7. Fonctions définies par des séries entières

<u>Nouveau point de vue</u>: à toute suite de nombres réels $(a_k)_{k\geq 0}$, telle que

$$r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}} > 0 \qquad (r \in \mathbb{R} \text{ ou } r = +\infty)$$

on peut associer une fonction f,

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

sur $D(f) =]a-r, a+r[$ $\cup$ éventuellement les bords de l'intervalle, c-à-d. $x=a-r$ et $x=a+r$

10.8. Dérivées des fonctions définies par des séries entières

10.8.1. Dérivation terme par terme

<u>Théorème</u>: soit $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ avec un rayon de convergence $r>0$ ($r \in \mathbb{R}$ ou $r=+\infty$), alors on a

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_{k+1}(k+1)}_{\in \mathbb{R}} (x-a)^k \qquad (*)$$

sur $D(f') =]a-r, a+r[$ $\cup$ éventuellement les bords de l'intervalle,

c-à-d. le rayon de convergence de $(*)$ est r.

10.8.2. Explications

i) on dérive "terme par terme"

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k\right)' \;\text{"="}\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x-a)^{k-1} =$$

ceci n'est pas évident, on échange des limites !

voir 7.12, exemple

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1)(x-a)^k$$

ii) si $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ (d'Alembert pour f), alors

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(k+1)}{a_{k+2}(k+2)}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2} = r \cdot 1 = r$$

(d'Alembert pour f').

10.8.3. Dérivée n-ème

Théorème Soit $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$ avec un rayon de convergence $r>0$ ($r \in \mathbb{R}$ ou $r = +\infty$), alors on a

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} \frac{(k+n)!}{k!} (x-a)^k \qquad (*),$$

le rayon de convergence de $(*)$ est r, et $f \in C^\infty(]a-r, a+r[)$.

Remarque: de $(*)$ on obtient (sans surprise, voir la formule de Taylor) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = a_n n!$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)}$$

10.9 Série de Taylor d'une fonction

Remarque: si f est une fonction de classe $C^\infty(I)$, I un intervalle ouvert, $a \in I$, on peut utiliser la formule de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + r_n(x) \qquad (*).$$

pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire (mais $n < \infty$)

Remarque: si f est de classe $C^\infty(I)$, $a \in I$ et si pour un $x \in I$ on a que dans $(*)$

$$\lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0 \qquad (**)$$

on obtient (pour ce x) à partir de la formule de Taylor dans la limite $n \to \infty$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Conclusion: si f est de classe $C^\infty(I)$, I un intervalle ouvert, $a \in I$, et s'il existe un intervalle ouvert $I_0 \subset I$, $a \in I_0$ tel que $\forall x \in I_0$ on a $(**)$, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k, \quad x \in I_0.$$

et on dit que f est représentée sur I_0 par sa série de Taylor en a.

Nomenclature: si $a=0$ la série de Taylor est aussi appelée la série de McLaurin

Definition. soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide. Alors

$$C^{\omega}(I) := \{ f : I \to \mathbb{R} : \ \forall a \in I, \text{ il existe } I_0 \subset I,\ a \in I_0, \text{ tel que } f \text{ soit représentée sur } I_0 \text{ par sa série de Taylor en } a \}$$

omega

10.10 Exemple de base, la série géométrique

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} \supset I =]-\infty, 1[$

Soit $I_0 =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ (à titre d'exemple), et $a=0$

- on a $a_k = \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(0) = \dfrac{1}{k!} \dfrac{k!}{(1-x)^{k+1}}\Big|_{x=0} = 1.$
- donc, formule de Taylor (théorème 1)

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{1}_{a_k} \cdot x^k + r_n(x) \quad , \ x \in I_0$$

avec

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u)\, x^{n+1} = \frac{1}{1-u} \left(\frac{x}{1-u} \right)^{n+1}$$

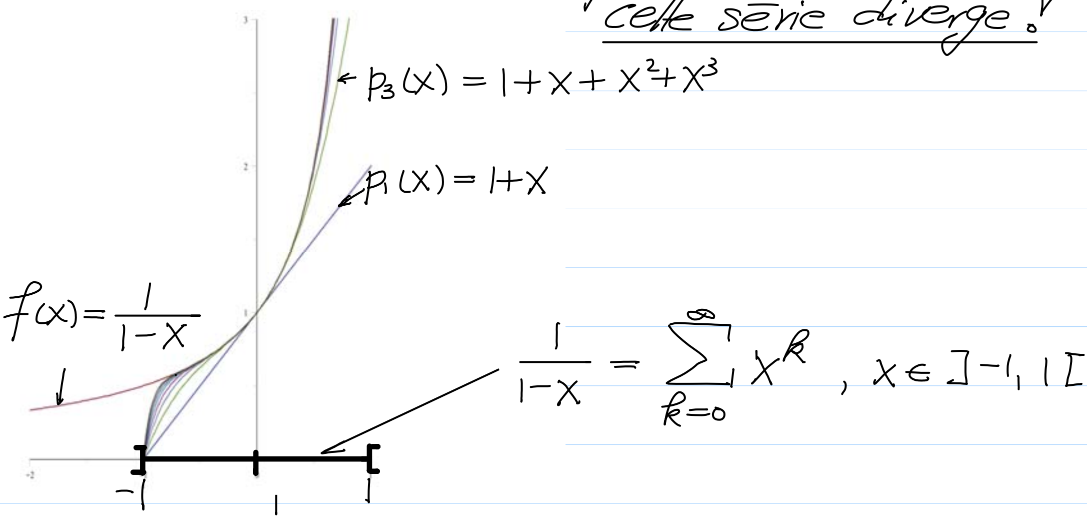
avec $u \in]0, x[$ pour $x > 0$ et $u \in]x, 0[$ pour $x < 0$.

- puisque $x \in I_0 =]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ on a $|x| < \frac{1}{4}$ et donc $|u| < |x| < \frac{1}{4} \Rightarrow |1-u| \geq |1-|u|| = 1-|u| > \frac{3}{4}$, et donc
$$|r_n(x)| \leq \frac{4}{3}\left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}\right)^{n+1} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

- ceci implique que
$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{au moins pour } x \in I_0$$

- en fait (voir 4.8) on a cette égalité dans cet exemple pour tout $x \in]-1, 1[$, c.-à-d. sur le domaine de définition de la fonction définie par la série $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$, qui a un rayon de convergence $r = 1$.

- mais attention
$$-1 = f(2) = \frac{1}{1-2} \neq \sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$
<u>cette série diverge !</u>



et ce n'est pas non plus toujours le cas que l'on a égalité sur tout l'intervalle de convergence de la série.

10.11. Contre-exemple de base

La condition $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas suffisante pour que f puisse être représentée par une série entière. Soit.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition : $f \in C^\infty(\mathbb{R})$: le seul point délicat est $a = 0$.

i) $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0 \Rightarrow f$ est continue en $x = 0$, (et donc sur $\mathbb{R}$)

ii) $$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} && \text{si} \quad x > 0 \\ f'(x) &= 0 && \text{si} \quad x < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0-} f'(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0+} f'(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f'(x) = 0 \Longrightarrow f'(0) = 0$$

voir Théorème 8.2

Voir 9.2.3 exemple 4

iii) par récurrence on montre que f est k fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ et que $f^{(k)}(0) = 0$

Formule de Taylor avec reste $(a = 0)$

$$a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = 0$$

$$x \leq 0 : \quad f(x) = 0 = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{=0} + \underbrace{r_n(x)}_{=0}$$

$x>0$: $f(x)=e^{-\frac{1}{x}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k}_{=0} + r_n(x)$

$\Longrightarrow \quad r_n(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x>0$, $n=0,1,2,\dots$

Donc, pour $x>0$ $\lim_{n\to\infty} r_n(x) = e^{-\frac{1}{x}} = f(x)$

Conclusion: $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, mais $f\notin C^\omega(\mathbb{R})$ "omega", les fonctions qui peuvent être représentées (en tout point $a\in\mathbb{R}$) par une série entière.

10.12 A (re-) connaître

Avec la même procédure que pour $f(x)=\frac{1}{1-x}$ on trouve

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad x\in\,]-1,1[.$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k \qquad x\in\,]-1,1[.$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} x^k \qquad x\in\,]-1,1[. \quad (x\in\,]-1,1]\ )$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \qquad x\in\mathbb{R}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} (-1)^k x^{2k+1} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} (-1)^k x^{2k} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

<u>Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$</u>

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad x \in]-1,1[$$

<u>Rappel:</u> $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$