Chapitre 10

Développements limités

10.1. Définitions

10.1.1. Développements limités

<u>Définition</u>: soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in I \subset D$, où I est un intervalle ouvert. Si pour un $n \in \mathbb{N}$ il existe des nombres $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue en $x = a$, tels que $\forall x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, (x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n autour de a

<u>Remarque</u>: si f admet un développement limité d'ordre n il est unique, car par récurrence on trouve que pour $0 \leq m \leq n$

$$a_m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} a_k \, (x-a)^k}{(x-a)^m}.$$

<u>Remarque</u>: l'existence d'un développement limité avec $n=0$ est équivalente à la continuité de f en a et avec $n=1$ à la differentiabilité de f en a.

10.1.2. Fonctions de classe C^k

<u>Terminologie</u>: fonctions de classe C^k $(\equiv C^k(I) = C^k(I, \mathbb{R}))$

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Alors on définit

$$C^0(I) := \{ f : D \to \mathbb{R} : I \subset D,\ f \text{ continue sur } I \},$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$C^k(I) := \{ f : D \to \mathbb{R} : I \subset D,\ f\ k \text{ fois différentiable sur } I \text{ et } f^{(k)} \text{ une fonction continue sur } I \}$$

De plus on dit que $f \in C^\infty(I)$, si $f \in C^k(I)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

<u>Remarque</u>: $C^0 \supset C^1 \supset C^2 \supset \dots \supset C^\infty \supset C^\omega$

"omega" (voir plus loin)

10.2 Formule de Taylor

10.2.1. Fonctions n+1 fois dérivables

Théorème 1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction $n+1$ fois dérivable sur I et soit $a \in I$. Alors f admet un développement limité d'ordre n. autour de a. Plus précisément, pour tout $x \in I$, $x > a$ ($x < a$) il existe $u \in]a,x[$ ($u \in]x,a[$) tel que:

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k}_{= p_n(x) \text{ le polynôme de Taylor d'ordre } n} + \underbrace{(x-a)^n \cdot \varepsilon(x)}_{= r_n(x) \text{, le } n\text{-ème reste}}$$

avec

$$\boxed{a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)}$$

u dépend de x

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u) \, (x-a)}$$

<u>Remarque</u>: pour $n=0$ on obtient $f(x) = f(a) + f'(u)(x-a)$ ce qui est le théorème des accroissements finis.

10.2.2. Démonstration

<u>Démonstration</u>: soit $x > a$ (la démarche est analogue pour $x < a$) et soit $g : [a,x] \to \mathbb{R}$ (avec $[a,x] \subset I$) définie par

$$g(y) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(y) (x-y)^k - c(x-y)^{n+1}.$$

g est continue sur $[a,x]$ et dérivable sur $]a,x[$. De plus $g(x) = 0$, et on choisit c tel que $g(a) = 0$ (isoler c dans l'équation $g(a) = 0$). Par le théorème de Rolle il existe donc $u \in]a,x[$ tel que

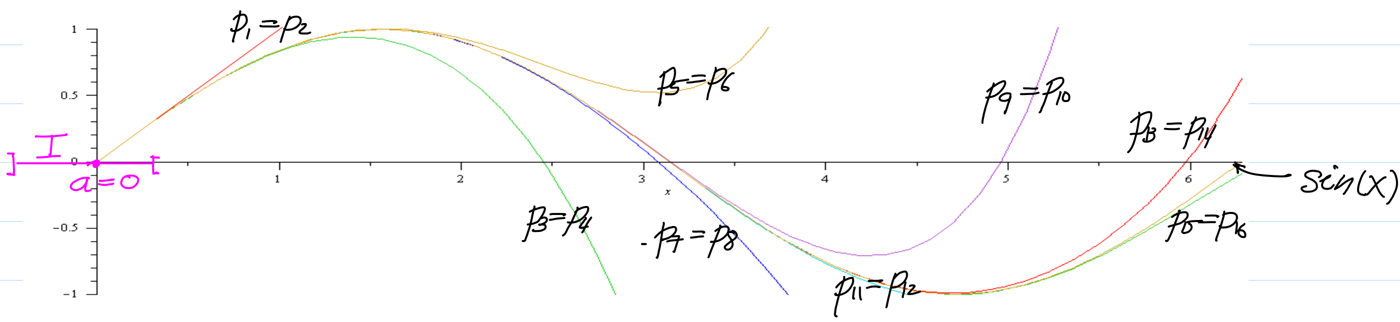
$$0 = g'(u) = \ldots = -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(u)\,(x-u)^n + c\,(n+1)\,(x-u)^n$$

ce qui implique que $c = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(u)$. Ceci montre le théorème, vu que l'équation $g(a)=0$ implique que.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)\,(x-a)^k + c\,(x-a)^{n+1} \qquad \square$$

10.3. Interprétation de la formule de Taylor.

10.3.1. Un exemple



Pour $f(x) = \sin(x)$ et $a=0$ on trouve par exemple (tous les polynômes sont impaires puisque sin est impaire).

$a_0 = \frac{1}{0!} f(0) = 0 \qquad p_0(x) = 0$

$a_1 = \frac{1}{1!} f'(0) = 1 \qquad p_1(x) = 0 + x = x$

$a_2 = \frac{1}{2!} f''(0) = 0 \qquad p_2(x) = 0 + x + 0 = x$

$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0) = -\frac{1}{6} \qquad p_3(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{6}x^3 = x - \frac{1}{6}x^3$

10.3.2. A connaître (faire les calculs analogues)

l'écriture implique $a=0$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+\underbrace{x^2+x^2\varepsilon(x)}_{=x\cdot\underbrace{(x+x\varepsilon(x))}_{=\varepsilon_1(x)} = x\cdot\varepsilon_1(x)} = 1+x+x\cdot\varepsilon_1(x)$$

on ne numérotera pas les fonctions ε

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^3\cdot\varepsilon(x).$$

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^3\varepsilon(x)$$

$$\sin(x) = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+x^5\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+x^4\varepsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+x^4\varepsilon(x)$$

$$\ln(x) = \ln(1+(x-1))$$

$$= (x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+(x-1)^3\underbrace{\varepsilon(x)}_{\lim_{x\to 1}\varepsilon(x)=0}$$

$a=1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k+x^n\varepsilon(x), \quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[(1+x)^\alpha\right]^{(k)}\Big|_{x=0}$$

dérivée k-ème

10.4. Application au calcul de limites

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x\cdot\varepsilon(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (1+\varepsilon(x)) = 1.$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-(1-\frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x))}{x^2} = \frac{1}{2}.$

3) Série 9, Ex. 5

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^4\cos(e^{\frac{1}{x^2}}))-1}{x} = (*)$$

Soit $X = x^4\cos(e^{\frac{1}{x^2}})$

On a $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ (deux gendarmes)

et $e^x = 1 + x + x\,\varepsilon(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$

Donc $e^X = 1 + X + X\cdot\varepsilon(X)$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} X = 0$ et $\varepsilon(x)$ est continue en $x=0$, on a

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(X) = 0 \quad \text{donc} \quad \varepsilon(X) = \varepsilon(x)$$

Par conséquence

$$(*) = \lim_{x\to 0} \frac{1 + X + X\varepsilon(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{X}{x}(1+\varepsilon(x))\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(x^3\cdot\cos(e^{\frac{1}{x^2}})\right)\cdot 1 = 0 \text{ (deux gendarmes)}$$

10.5. Composition de développements limités

10.5.1. Exemple

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\underset{\cos(0)}{1} + \underbrace{(\cos(x)-1)}_{=: X}} \qquad (\text{autour de } a=0)$$

avec $\lim_{x\to 0} X = 0$.

On a $X = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$ et

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + X^2 \cdot \varepsilon(X)$$

et donc (à l'ordre 4 à titre d'exemple)

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 - \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)\right)$$

$$+ \left(-\frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)}_{= x^2\cdot\varepsilon(x)}\right)^2$$

$$\underbrace{+ \left(-\frac{1}{2}x^2 + \underbrace{\frac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)}_{= x^2\cdot\varepsilon(x)}\right)^2 \varepsilon(x)}_{= x^4\varepsilon(x)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right)x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x).$$

10.5.2. Applications

1) $\tan(x)$ autour de $a=0$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \sin(x)\cdot\frac{1}{\cos(x)}$$

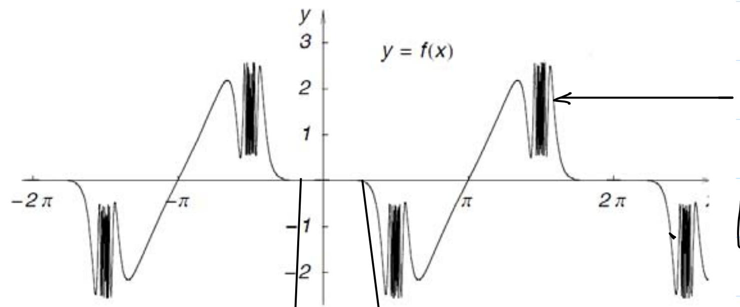
$$= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)\right)\cdot\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)\right)$$

$$= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + x^3\varepsilon(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + x^3\cdot\varepsilon(x)$$

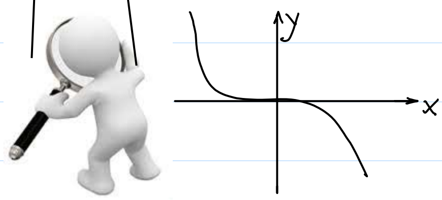
pousser le développement jusqu'à l'ordre 7
pour le prochain exemple

2) $f(x) = \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x)) = -\frac{1}{30}x^7 + x^7\varepsilon(x)$

amusez-vous !



graphe de la fonction
$f(x) = \sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$;
voir 5.5., exemple 4)



$f(x) = -\frac{1}{30}x^7 + x^7\varepsilon(x)$

3) Série 3, Ex. 11

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)^{n^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\left(2\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(2\cdot\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)^2+\dots\right)+\frac{2}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2+\dots-\frac{1}{x^2}+\dots\right)\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^2}+\dots\right)\right)}$$

$$= e^{-4}$$

4) Série 6, Ex. 8

$$(*) \equiv \sin\big(\underbrace{\cos(x) - 1}_{-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots}\big) - \cos\big(\underbrace{\sin(x)}_{x - \frac{1}{6}x^3 + \dots}\big) + 1 =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 - \frac{1}{24}x^4 + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right)x^4 + \dots = -\frac{1}{6}x^4 + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{(*)}{x^4} = -\frac{1}{6}$$

10.6 Séries entières

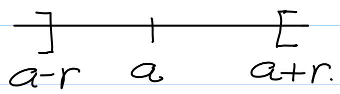
10.6.1 Definition

<u>Definition</u>: une série de la forme

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k \, (x-a)^k}_{=: b_k \in \mathbb{R}} \leftarrow \text{puissances entières.}$$

avec $a \in \mathbb{R}$, $a_k \in \mathbb{R}$ fixes et $x \in \mathbb{R}$ un paramètre est appelée une série entière.

On s'intéresse à la convergence de la série et à sa somme en fonction du choix du paramètre x.
Souvent on pose $x = a + \varepsilon$ (étude proche de $x = a$).
Pour $r > 0$ on a : $|\varepsilon| < r \Leftrightarrow |x-a| < r \Leftrightarrow x \in \,]a-r, a+r[$



10.6.2. Rayon de convergence

Théorème: il existe $r \in [0, \infty[\cup \{+\infty\}$ tel que la série entière

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$$

converge absolument pour $|\xi| < r$ (x dans l'intervalle $]a-r, a+r[$), et tel que la série diverge pour $|\xi| > r$ ($x \notin [a-r, a+r]$).

Remarque: à noter que le théorème implique que r est unique.

Terminologie: le nombre r dans le théorème est appelé rayon de convergence de la série.

Théorème: on a (voir 4.9 et en bas)

$$\boxed{r = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}}$$

(critère du limsup)

ainsi que, si les limites existent,

$$r = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{|a_k|^{\frac{1}{k}}} \right) \qquad \text{(Cauchy)}$$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|} \right) = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \qquad \text{(d'Alembert)}$$

10.6.3. Démonstration et remarques

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{a_k (x-a)^k}_{=: b_k \in \mathbb{R}}$$

et par les critères dans 4.9 on a convergence absolue si

$$q = \lim_{k\to\infty} |b_k|^{\frac{1}{k}} = |x-a| \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}_{=\frac{1}{r}} < 1 \qquad \text{(Cauchy)}$$

$$q = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| = |x-a| \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|}_{=\frac{1}{r}} < 1 \qquad \text{(d'Alembert)}$$

$$q = \limsup_{k\to\infty} |b_k|^{\frac{1}{k}} = |x-a| \cdot \underbrace{\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}_{=\frac{1}{r}} < 1 \qquad \text{(critère du limsup)}$$

ce qui est le cas si $|x-a| < r$. De même la série diverge si $q > 1$, ce qui est le cas si $|x-a| > r$.

Remarques:

- le théorème ne dit rien sur la convergence de la série pour $x = a+r$ et $x = a-r$. <u>A contrôler séparément !</u>
- si $r = +\infty$ la série converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- si $r = 0$ la série ne converge que pour $x = a$ et $s = a_0$