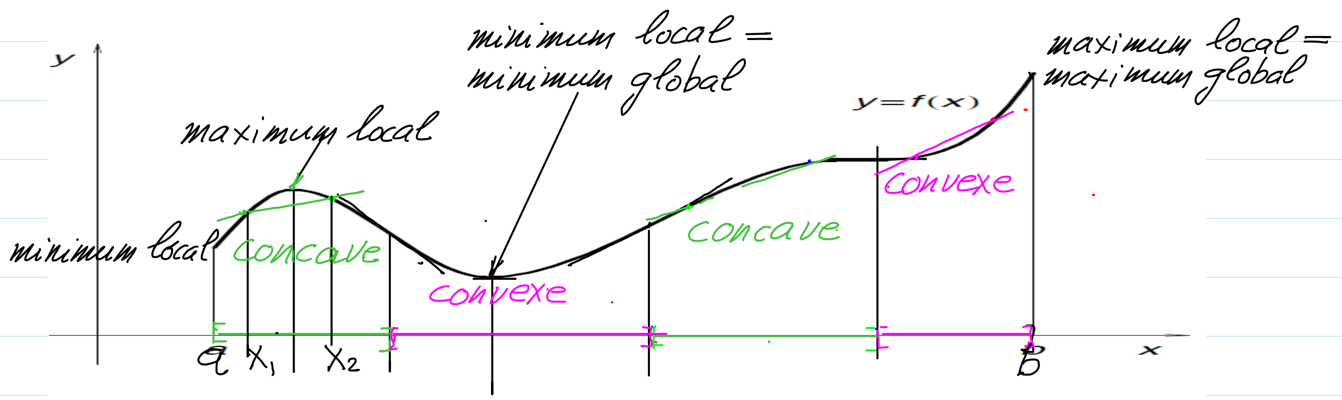
9.5. Discussion du graphe d'une fonction

Dans cette section on suppose que $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, $I = [a,b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et que $I_0 \subset I$ est un sous-intervalle fermé.

9.5.1. Terminologie



9.5.2 Définitions

<u>convexe</u>: f est convexe sur I_0 si $\forall x_1, x_2 \in I_0$, $x_1 < x_2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$.

<u>concave</u>: f est concave sur I_0 si $\forall x_1, x_2 \in I_0$, $x_1 < x_2$, $\forall \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

<u>point stationnaire</u>: f admet un point stationnaire en $x_0 \in [a,b]$ si f est différentiable en x_0 et $f'(x_0) = 0$

<u>maximum local</u>: f admet un maximum local en $x_0 \in [a,b]$ si $f(x) \leqslant f(x_0)$ <u>pour x proche de x_0</u>
(______ $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in [a,b]$, tels que $|x - x_0| < \varepsilon$)

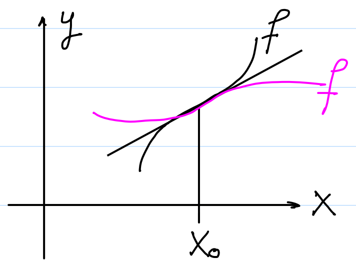
<u>minimum local</u>: f admet un minimum local en $x_0 \in [a,b]$ si $f(x) \geqslant f(x_0)$ <u>pour x proche de x_0</u>

maximum [global]: f admet un maximum [global] en $x_0 \in [a,b]$ si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in [a,b]$.

minimum [global]: f admet un minimum [global] en $x_0 \in [a,b]$ si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in [a,b]$.

extremum (local): f admet un maximum (local) ou un minimum (local).

point d'inflexion: f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a,b[$ si f est différentiable en x_0 et s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que le reste $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$ satisfait $\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\setminus \{x_0\}$ $r(x) \cdot (x - x_0) > 0$ (ou < 0).

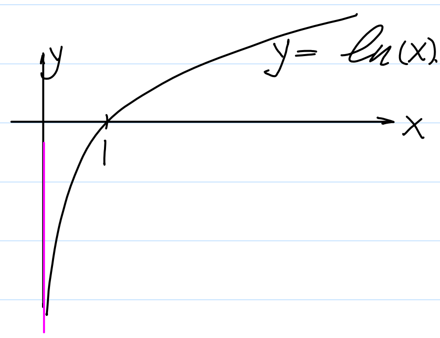


asymptotes (exemples)

i) **asymptotes verticales** "$\lim\limits_{\substack{x \to a\pm \\ a \in \mathbb{R}}} f(x) = \pm\infty$"

Exemple: $\ln :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

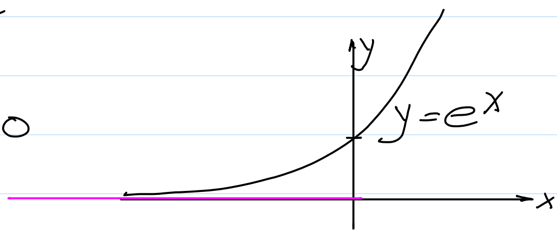
$$\lim_{x \to 0+} \ln(x) = -\infty$$



ii) **asymptotes horizontales** "$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b_\pm$, $b_\pm \in \mathbb{R}$"

Exemple: $f(x) = e^x$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

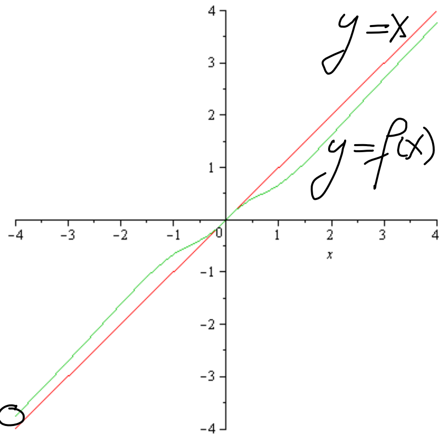


iii) <u>asymptotes obliques</u> "$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_\pm x + b_\pm$", $a_\pm, b_\pm \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{gathered} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a_\pm \in \mathbb{R} \\[2ex] \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - a_\pm x\right) = b_\pm \in \mathbb{R}. \end{gathered}}$$

<u>Exemple</u>

$$f(x) = \frac{x + x^5}{1 + x^2 + x^4} \quad \text{impair}$$



$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^3}{1+x^2+x^4} = 0$$

et donc $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x$.

9.6. Critères

9.6.1. Convexité

<u>Remarque:</u> les théorèmes qui suivent découlent tous du théorème des accroissements finis et de ses corollaires (sous hypothèse de l'existence des fonctions dérivées en question).

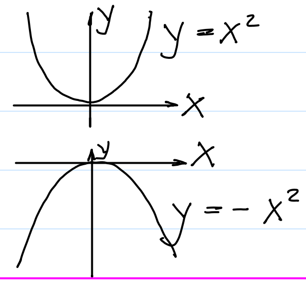
<u>Théorème</u> (critère suffisant pour la convexité)
Si f' est une fonction <u>croissante</u> sur I_0 (en particulier si $f'' \geq 0$ sur I_0), alors f est convexe sur I_0.

Théorème (critère suffisant pour la concavité)
Si f' est une fonction décroissante sur I_0 (en particulier si $f'' \leq 0$ sur I_0), alors f est concave sur I_0.

Remarque: toujours avoir en tête les exemples

$$f(x) = x^2 \quad (\text{convexe sur } \mathbb{R})$$

$$f(x) = -x^2 \quad (\text{concave sur } \mathbb{R})$$



9.6.2. Extrema

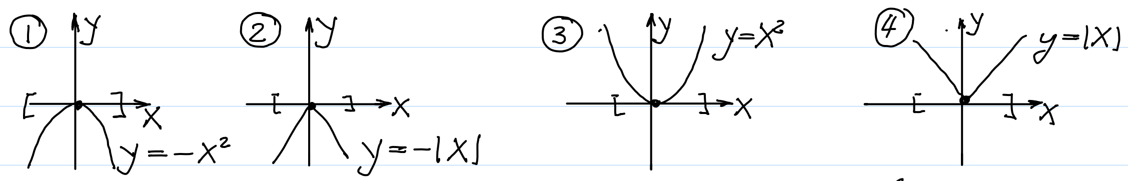
Théorème (extremum local, condition nécessaire)

Si f admet un extremum local en $x_0 \in \,]a,b[$.
et si f est dérivable en x_0, alors $f'(x_0)=0$

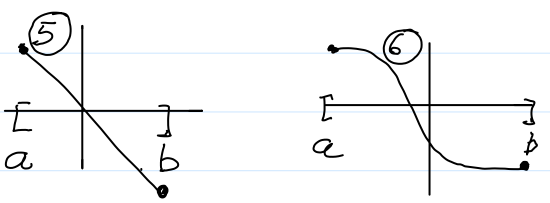
Théorème (extremum local, condition suffisante)

i) si $f'(x_0)=0$ en $x_0 \in [a,b]$ et si $f''(x_0) < 0$
alors f admet un maximum local en x_0

ii) si $f'(x_0)=0$ en $x_0 \in [a,b]$ et si $f''(x_0) > 0$
alors f admet un minimum local en x_0.



maximum local — minimum local

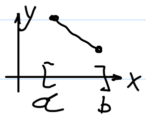
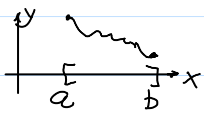


① cas i) du théorème
③ cas ii) du théorème
②, ④ le théorème ne s'applique pas
⑤ maximum (local) en a, minimum (local) en b, le théorème ne s'applique pas
⑥ cas i) du théorème en a, cas ii) en b.

Théorème (extremum [global])
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f continue sur $[a,b]$
Les points $x_0 \in [a,b]$ d'extremums [globaux] sont éléments de :

i) {les points dans $]a,b[$ où f n'est pas dérivable}

ii) {les points où $f' = 0$} (points stationnaires)

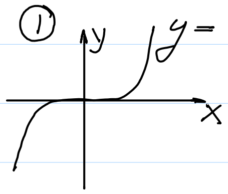
iii) $\{a, b\}$  ,  (les bords)

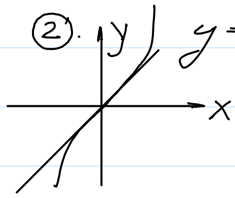
9.6.3. Points d'inflexion

Théorème (points d'inflexion)
Soit f une fonction trois fois dérivable sur $]a,b[\subset D(f)$.

i) si f admet un point d'inflexion en $x_0 \in]a,b[$ alors $f''(x_0) = 0$

ii) si $f''(x_0) = 0$ et $f'''(x_0) \neq 0$ en $x_0 \in]a,b[$, alors f admet un point d'inflexion en x_0

① $y = x^3 = f(x)$


② $y = x + x^3 = f(x)$


① $f''(0)=0$, $f'''(0)=6\neq 0 \implies$ point d'inflexion par ii)

ou directement en utilisant la définition

$f(x) = 0 + 0\cdot(x-0) + r(x) \implies r(x) = x^3$

et $r(x)\cdot(x-0) = x^4 > 0$ pour $x \neq 0$

② $f''(0)=0$, $f'''(0)=6\neq 0 \implies$ point d'inflexion par ii)

ou directement en utilisant la définition

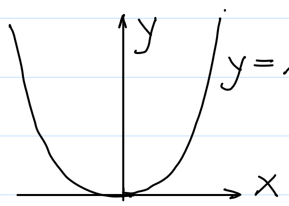
$f(x) = 0 + 1\cdot(x-0) + r(x) \implies r(x) = x^3$

et $r(x)\cdot(x-0) = x^4 > 0$ pour $x \neq 0$

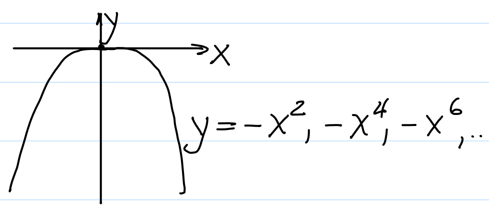
9.6.4. Le cas général

Remarque (cas général)

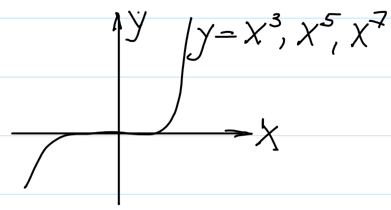
- si $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) < 0$, n pair alors f admet en x_0 un maximum local.
- si $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) > 0$, n pair alors f admet en x_0 un minimum local
- si $f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, n impair alors f admet en x_0 un point d'inflexion.



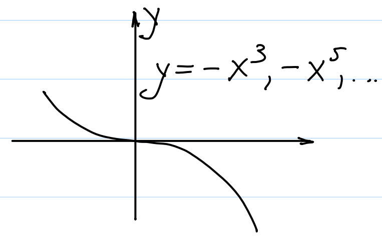
minimums



maximums



points d'inflexion

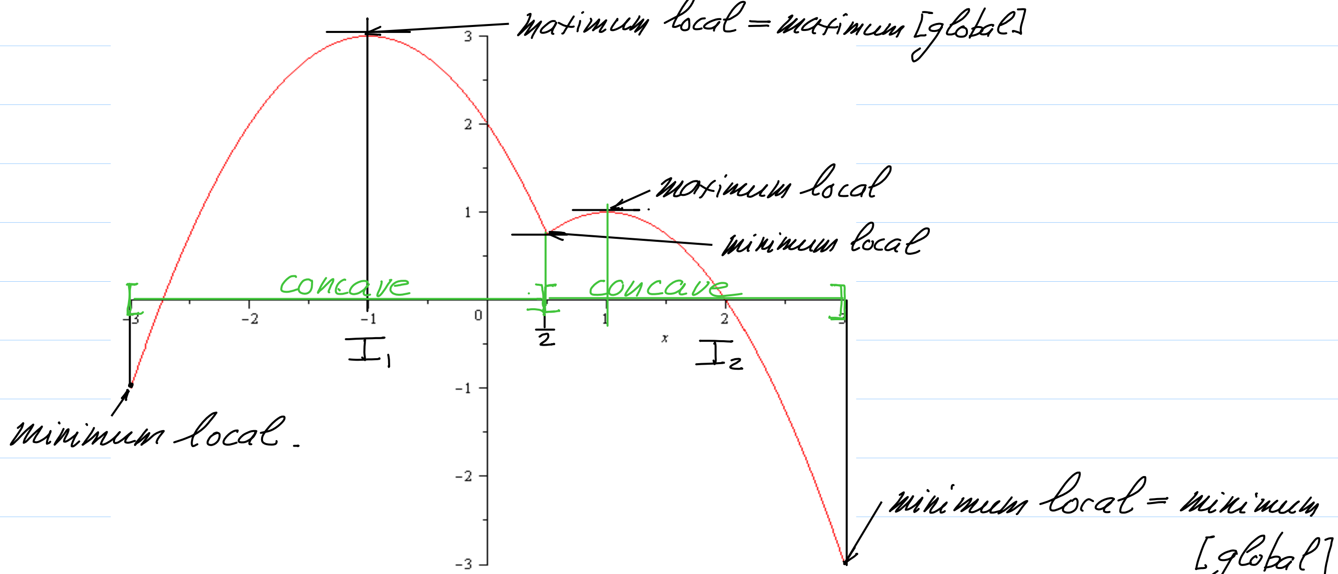


9.7. Exemple d'étude d'une fonction

9.7.1. Le procédé

1) trouver $D(f)$, $Im(f)$ si possible, sinon à la fin de la discussion
2) symétries (paire, impaire, périodique)
3) zéros de f
4) continuité de f (limite à droite, limite à gauche pour les points de discontinuité et pour les points au bord)
5) dérivabilité de f (calculer f', f'' avec leur domaine de définition $\subset D(f)$)
6) points particuliers (points stationnaires, extremums. (locaux et glaubaux) points où f n'est pas dérivable)
7) monotonie de f (signe de f', convexité, concavité)
8) asymptotes éventuelles
9) tracer le graphe de f

9.7.2 L'exemple



$$f(x) = |2x-1| - x^2 + 1 \quad , \quad D(f) = [-3, 3]$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 2 - 2x - x^2 & \text{si} \quad x \in [-3, \frac{1}{2}[=: I_1 \\ 2x - x^2 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{2}, 3] =: I_2 . \end{cases}$$

9.7.3. Points 1-5 du procédé

1) $D(f) = [-3, 3]$, $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$ (si f continue)

2) f n'a pas de symétries

pas dans I_1

3) $x^2 + 2x - 2 = 0$ sur I_1 $\quad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = -1-\sqrt{3} = -2.7\ldots$

$2x - x^2 = 0$ sur I_2 $\quad x = 2 \quad (x = 0 \notin I_2)$

4) f continue sur $[-3,3]$ (composition, addition, ... de fonctions continues)

5) f dérivable sur I_1 et I_2 (même sur $I_1 \cup \{\frac{1}{2}\} = [-3, \frac{1}{2}]$)
mais pas sur $I_1 \cup I_2$

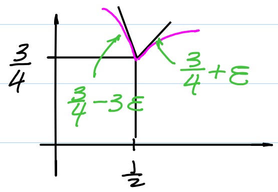
Sur I_1 : $f'(x) = -2-2x$, $f''(x) = -2$
Sur I_2 : $f'(x) = 2-2x$, $f''(x) = -2$

9.7.4. Point 6 du procédé

6) <u>points particuliers</u>

i) <u>f n'est pas dérivable en</u> $x = \frac{1}{2}$ car :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} (-2-2x) = -3 \\ \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} (2-2x) = 1 \end{array}\right\} -3 \neq 1$$



de plus on a (pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $|\varepsilon|$ petit)

$$f\left(\tfrac{1}{2}+\varepsilon\right) = |2\varepsilon| + \tfrac{3}{4} - \varepsilon - \varepsilon^2 \geq \tfrac{3}{4} + |\varepsilon| - \varepsilon^2 \geq \tfrac{3}{4}$$

un candidat pour m

et il s'agit donc d'un minimum local

ii) points où $f'=0$: Sur I_1 : $-2-2x=0 \Rightarrow x=-1$
Sur I_2 : $2-2x=0 \Rightarrow x=1$

en $x=-1$: $f''(-1)=-2$, donc f admet un maximum local
en $x=1$: $f''(1)=-2$, donc f admet un maximum local
on a $f(-1)=3$, $f(1)=1$
des candidats pour M

iii) valeurs au bord $f(-3)=-1$, $f(3)=-3$

maximum et minimum [global]

$$M = \text{maximum}\left\{-1,-3,\tfrac{3}{4},1,3\right\} = 3$$
$$m = \text{minimum}\left\{-1,-3,\tfrac{3}{4},1,3\right\} = -3.$$

Donc $Im(f)=[-3,3]$

9.7.5. Points 7-9 du procédé

7) monotonie, convexité/concavité (tableau des signes)

$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$, f n'admet pas de dérivée en $x=\frac{1}{2}$

Discussion: $[-3,3]=[-3,-1]\cup[-1,\tfrac{1}{2}]\cup[\tfrac{1}{2},1]\cup[1,3]$

i) sur $[-3,-1]$: $f'(-3)=4$, $f''(x)=-2<0$. Donc f' est décroissante sur $[-3,-1]$: $4 \geq f'(x) \geq 0$, donc f est une fonction croissante et f est concave

sur $[-1,\frac{1}{2}]$ c'est la dérivée à gauche en $\frac{1}{2}$

ii) sur $[-1,\frac{1}{2}]$: $f'(-1)=0$, $f''(x)=-2<0$. Donc f' est décroissante sur $[-1,\frac{1}{2}]$: $0 \geq f'(x) \geq -3$, donc f est une fonction décroissante et f est concave.

sur $[\frac{1}{2}, 1]$ c'est la dérivée à droite en $\frac{1}{2}$

iii) sur $[\frac{1}{2}, 1]$: $f'(\frac{1}{2}) = 1$, $f''(x) = -2 < 0$. Donc f' est décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$: $1 \geq f'(x) \geq 0$, donc f est une fonction croissante et f est concave.

iv) sur $[1,3]$: $f'(1) = 0$, $f''(x) = -2 < 0$. Donc f' est décroissante sur $[1,3]$, $0 \geq f'(x) \geq -4$, donc f est une fonction décroissante et f est concave

<u>Attention</u>: f est concave sur I_1 et I_2 mais f n'est pas concave sur $I_1 \cup I_2$

8) pas d'asymptotes à discuter.

9) voir le graphe