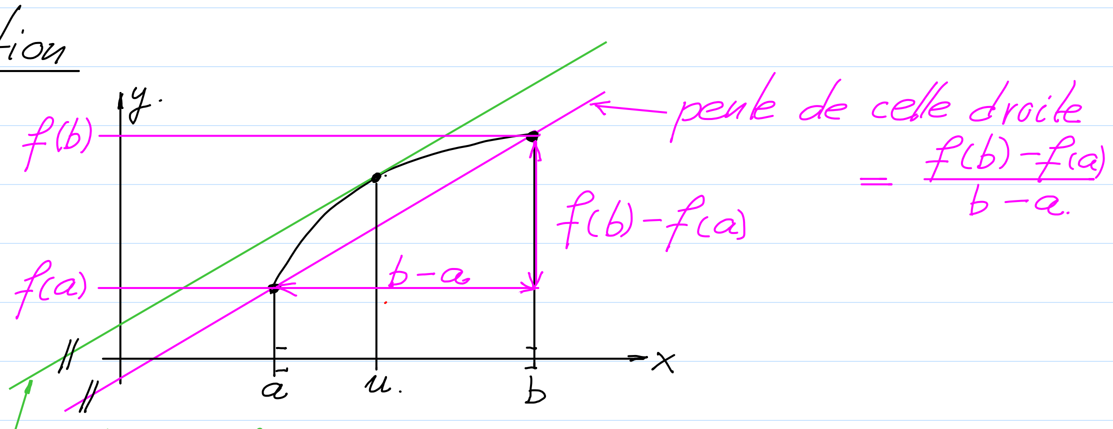
8.5. Théorème des accroissements finis

$\boxed{\text{\underline{Théorème}. soit } f: D \longrightarrow \mathbb{R},\ [a,b] \subset D,\ a,b \in \mathbb{R},\ a<b, f \text{ continue sur } [a,b] \text{ et dérivable sur }]a,b[. \text{ Alors il existe } u \in]a,b[\text{ tel que } \boxed{f'(u) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \quad (*)}$

<u>Explication</u>



<u>Démonstration</u>: soit

$$g(x) = f(x) - \underbrace{\left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)}_{\text{équation de la droite en magenta}}$$

$$g(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - f(b) = 0$$

g continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$

Par le théorème de Rolle il existe $u \in]a,b[$ tel que

$$0 = g'(u) = f'(u) - \left(0 + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \Rightarrow (*)$$

8.6 Implications du théorème des accroissements finis

8.6.1. Remarques et reformulation

<u>Remarque</u>: (*) peut être réécrit (isoler $f(b)$)

$$\boxed{f(b) = f(a) + f'(u)\,(b-a)} \quad (**).$$

<u>Remarque</u> si f est continue sur $[a,b]$, $a<b$ et dérivable sur $]a,b[$, alors pour tout $[c,d] \subset [a,b]$, $c<d$, f est continue sur $[c,d]$ et dérivable sur $]c,d[$
$\Longrightarrow$ le théorème s'applique à $[c,d]$

<u>Reformulation</u> Soit $[x, x+h] \subset D(f)$, $h>0$, f continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$.
Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\boxed{f(x+h) = f(x) + f'(x+\theta h)\,h. \qquad (**)_{bis}}$$

<u>Démonstration</u>: poser $a=x$, $b=x+h$, $u=x+\theta h \in]x;x+h[$

8.6.2. Conséquences immédiates

<u>Conséquences immédiates de $(**)_{bis}$</u>

<u>Corollaire 1</u>: Soit $[a,b] \subset D(f)$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si
<u>$f'=0$ sur $]a,b[$</u> (c.-à-d. $\forall x \in]a,b[$, $f'(x)=0$)
alors f est constante sur $[a,b]$ (c.-à-d. $\forall x \in [a,b]$, $f(x)=f(a)$).

<u>Corollaire 2</u> : Soit $[a,b] \subset D(f)$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ Alors

i) $f' \geq 0$ sur $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ f croissante sur $[a,b]$
ii) $f' > 0$ sur $]a,b[$ $\Rightarrow$ f strictement croissante sur $[a,b]$
iii) $f' \leq 0$ sur $]a,b[$ $\Leftrightarrow$ f décroissante sur $[a,b]$
iv) $f' < 0$ sur $]a,b[$ $\Rightarrow$ f strictement décroissante sur $[a,b]$

<u>Corollaire 3</u> : Soit $[a,b] \subset D(f)$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Si <u>$f(a) \geq 0$ et $f' \geq 0$ sur $]a,b[$</u>, alors <u>$f \geq 0$ sur $[a,b]$</u>

Chapitre 9

Etude des fonctions

9.1. Théorème des accroissements finis généralisé

Théorème Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D(f) \cap D(g)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f, g continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$, et $\forall x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$. Alors il existe $u \in]a,b[$, tel que

$$\boxed{\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}$$

Remarque: pour $g(x) = x$ c'est le théorème des accroissements finis

Remarque: $\forall x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0 \Rightarrow g(b) \neq g(a)$ (car si $g(b) = g(a)$, alors il existe u tel que $g'(u) = 0$)

Démonstration: on pose

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} (g(x) - g(a)) \right)$$

On a $h(a) = h(b) = 0$ et on applique le théorème de Rolle

9.2. Règle de Bernoulli de l'Hospital

9.2.1. Enoncé du théorème

Théorème Soit $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $g : D(g) \to \mathbb{R}$, deux fonctions dérivables sur $]a,b[\subset D(f) \cap D(g)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, telles que $\forall x \in]a,b[\,, g'(x) \neq 0$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0 \qquad (1)$$

et

$$\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \qquad (2)$$

A

$\Downarrow$

Alors

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell .$$

B

Remarque: (généralisation de BH). On a le théorème analogue pour $\lim\limits_{x\to b-} \ldots$ et pour les cas.

$\pm\infty$ au lieu de 0 dans (1).

9.2.2. Exemples et contre-exemple

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \underset{\substack{\text{une fonction}\\ \text{paire}}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} \underset{BH\,\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x)}{1} \underset{\substack{\cos(x)\text{ une}\\ \text{fonction continue}}}{=} \cos(0) = 1.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \Bigg|_{\text{une fonction paire}} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{\substack{BH\\ \frac{0}{0}}}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sin(x)}{2x}$

$$= \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2}.$$

<u>Bémol</u>  : <u>la réciproque de BH (B ⇒ A) est fausse</u> !

On a $\lim\limits_{x\to 0+} \left(x\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{\substack{\text{théorème des}\\ \text{deux gendarmes}}}{=} 0$,

mais $0 = \lim\limits_{x\to 0+} \left(x\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \underset{\boxed{BH,\ \frac{0}{0}}}{=}$ pourvu que le "Si" soit satisfait

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2x\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{1}$$ <u>n'existe pas</u>.

le théorème BH ne s'applique pas

<u>9.2.3. Comparaison de fonctions</u>

1) $\lim\limits_{x\to 0+} \left(x\cdot \ln(x)\right) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{BH,\\ \frac{-\infty}{+\infty}}}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to 0+} (-x) = 0$$

2) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} \left(e^{\ln(x)}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\cdot \ln(x)} =$

$$\underset{\substack{\exp(x)\text{ une}\\ \text{fonction continue}}}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0+}(x\cdot \ln(x))} = e^0 = 1$$

3) $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ x\in\mathbb{R}}} \left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} \left(e^{\ln(1+\frac{2}{x})}\right)^x =$

la suite $x_n = n$ — toutes les suites (x_n) telles que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot \ln(1+\frac{2}{x})\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}\right)} = \Big|_{BH,\ \frac{0}{0}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x}}\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}\right)} = e^{2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x}}} = e^2$$

4) $\boxed{\forall p\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x^p}e^{-\frac{1}{x}}\right) = 0}$

i) $\underline{p\leq 0}$: $\frac{1}{x^p} = x^{-p} = x^{|p|}$

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x^p}e^{-\frac{1}{x}}\right) = \Big(\underbrace{\lim_{x\to 0+} x^{|p|}}_{\substack{=1,\ p=0 \\ =0,\ p<0}}\Big)\Big(\underbrace{\lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}}}_{=0}\Big) = 0$$

ii) $\underline{0<p\leq 1}$:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^p}e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x^p}}{e^{\frac{1}{x}}} = \Big|_{BH\ \frac{\infty}{\infty}} \lim_{x\to 0+}\frac{(-p)\frac{1}{x^{p+1}}}{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(p\cdot\frac{1}{x^{p-1}}e^{-\frac{1}{x}}\right) \underset{\text{car } p-1\leq 0}{\overset{i)}{=}} 0$$

iii) $\underline{p>1}$, BH par récurrence $n := \lceil p\rceil$ fois : ($:=$ le plus petit entier $\geq p$)

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x^p}}{e^{\frac{1}{x}}} = \dots\ BH\ \frac{\infty}{\infty},\ n \text{ fois}, \dots =$$

$$= \lim_{x\to 0+}\left(p\cdot(p-1)\cdot\ldots\cdot(p-n)\frac{1}{x^{p-n}}e^{-\frac{1}{x}}\right) \underset{i)}{=} 0$$

9.3. Démonstration du théorème de BH

i) f, g dérivables sur $]a,b[$, donc f, g continues sur $]a,b[$. Donc pour tout $x \in]a,b[$, f, g continues sur $]a,x]$ et dérivables sur $]a,x[$.

ii) f, g continues sur $[a,x]$ par prolongement par continuité si on définit $f(a) = g(a) = 0$, car par hypothèse $\lim\limits_{t \to a+} f(t) = \lim\limits_{t \to a+} g(t) = 0$.

iii) on a le théorème des accroissements finis généralisé sur $[a,x]$ ($g'(t) \neq 0$ pour tout $t \in]a,x[$ par hypothèse).

iv) $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \underset{\text{théorème des accroissements finis généralisé}}{=} \frac{f'(u)}{g'(u)}$$

pour un $u \in]a,x[$.

v) puisque $u \in]a,x[$ on obtient par iv) pour toute suite (x_n), $x_n > a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ une suite (u_n), $u_n > a$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ ce qui implique que

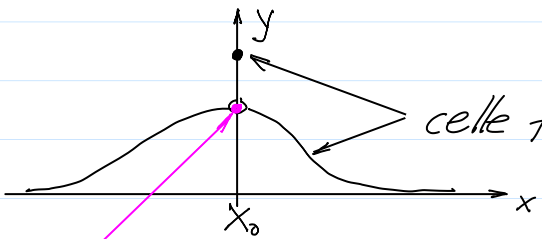
$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{u \to a+} \frac{f'(u)}{g'(u)}$$ pourvu que $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f'(u)}{g'(u)}$ existe

ici on considère toutes les suites (u_n) telles que $u_n > a$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$. Mais $u \in]a,x[$ dépend de x et on ne devrait considérer que les suites (u_n) générées par les suites (x_n) de la limite originale.

9.4. Démonstration du théorème 8.2

Théorème 8.2 Soit $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[\subset D$, $a<b$, f continue sur $]a,b[$, dérivable sur $]a,b[\setminus \{x_0\}$, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \ (A)}$ alors

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) = \ell \ (B)}$$



cette fonction n'est pas possible comme dérivée d'une fonction f

si c'est le graphe d'une fonction dérivée, la valeur en x_0 est là

Démonstration

$\Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0+} \dots = \lim\limits_{h\to 0-} \dots$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \underset{BH,\ \frac{0}{0}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{h\to 0+} \dfrac{f'(x_0+h)}{1} \\ \lim\limits_{h\to 0-} \dfrac{f'(x_0+h)}{1} \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0} f'(x_0+h) = \ell$$

par hypothèse