Analyse I

Section MT

EPFL, automne 2023

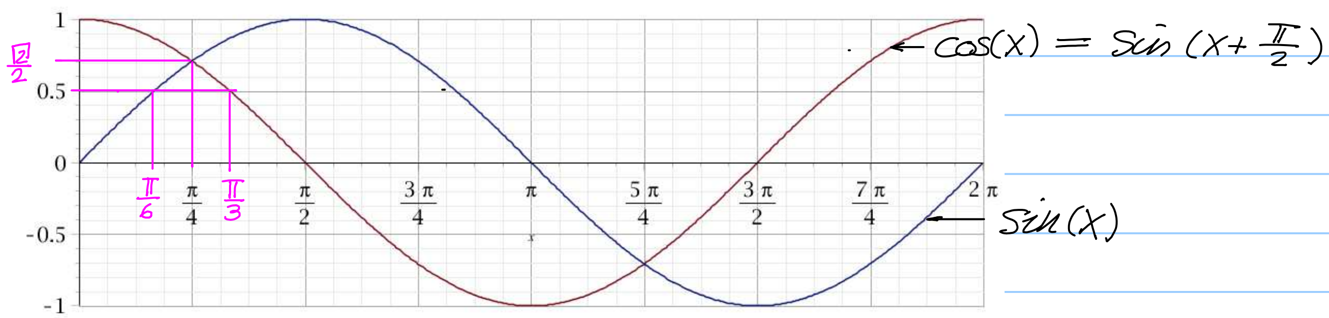
Manuscrit : Peter Wittwer

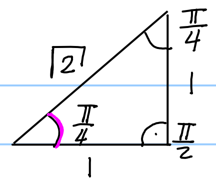
Prélude

Voir série -1

Fonctions élémentaires (exemples)

sin(x), cos(x), tan(x)

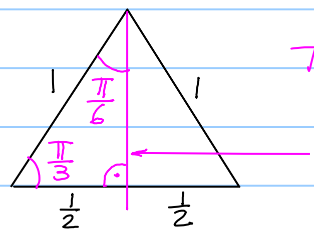




triangle isocèle $\quad (\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1^2}$ par Pythagore$)$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



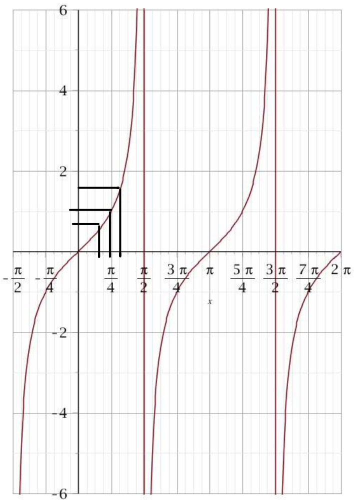
triangle équilatéral

$$\sqrt{1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}\ , \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ , \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sqrt{2} = 1.414\ldots\ , & \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707\ldots\ , & \\ \sqrt{3} = 1.732\ldots\ , & \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866\ldots\ , & \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577\ldots \end{array}}$$



$$tg(x) \equiv \tan(x)$$

notations équivalentes

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

"est par définition égal à"

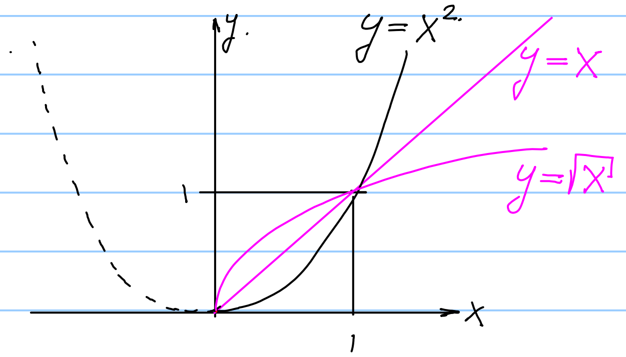
$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Paires de fonctions réciproques

i) x^2, $\sqrt{x}$



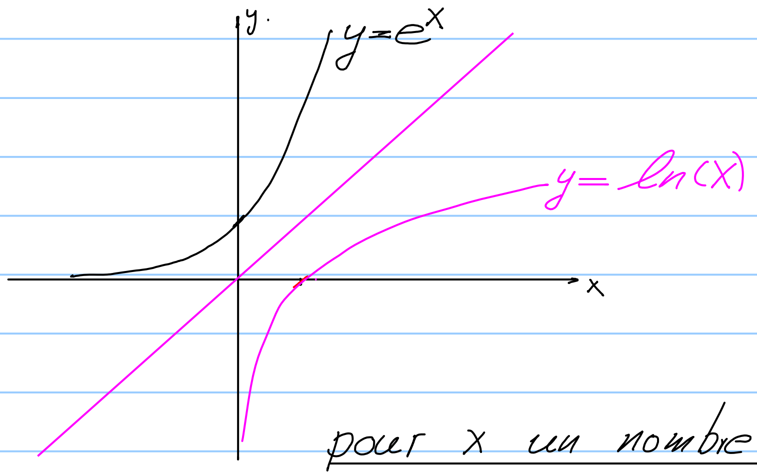
pour x un nombre positif ou zéro :

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x^2} &= x \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 &= x \end{aligned}\right\} (*)$$

(*) implique que x^2 et $\sqrt{x}$ sont des fonctions réciproques.

ii) $e^x \equiv \exp(x)$, $\ln(x)$ (= logarithme népérien)

$\mathrm{Log}(x) \equiv \ln(x)$

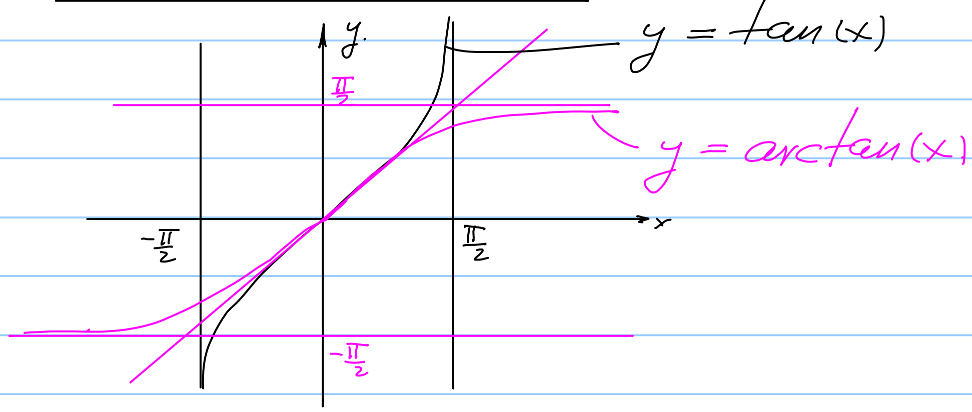


positif, zéro ou négatif

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } x \text{ un nombre positif:} & e^{\ln(x)} = x \\ \text{pour } x \text{ un nombre 'quelconque':} & \ln(e^x) = x \end{array}\right\} (*).$$

(*) implique que e^x et $\ln(x)$ sont des fonctions réciproques.

iii). $\tan(x)$, $\arctan(x)$



$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } x \text{ un nombre 'quelconque':} & \tan(\arctan(x)) = x \\ \text{pour } x \text{ un nombre entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{2}: & \arctan(\tan(x)) = x \end{array}\right\} (*).$$

(*) implique que $\tan(x)$ et $\arctan(x)$ sont des fonctions réciproques

Puissances, racines, etc. (règles de calcul)

Pour a, b des nombres positifs et m, n des entiers positifs ou zéro :

Convention : $a^{0} = 1$ (zéro)

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} = a^m \cdot b^{-m} = \frac{b^{-m}}{a^{-m}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

On a les mêmes règles de calcul pour a^x pour x un nombre non entier. En particulier on écrit

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}} \qquad (\text{où } a > 0\ !)$$

pour (l'unique) nombre positif tel que $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

Remarque : pour n un entier naturel impair on trouve dans la littérature la notation $\sqrt[n]{a}$ aussi pour $a < 0$, et dans ce cas, et dans ce cas seulement

$$\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$$

[sinon on arrive à des contradictions :

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$
]

La fonction réciproque de la fonction a^x, $a>0$, $a\neq 1$

est appelée $\log_a(x)$ ce qui veut dire que

$$a^{\log_a(x)} = x \quad \text{pour } x \text{ un nombre positif}$$

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{pour } x \text{ un nombre quelconque}$$

Identités qui découlent de la réciprocité

$$\log_a(1) = 0 \quad \text{et} \quad \log_a(a) = 1$$

pourquoi ?

$$\left.\begin{aligned} \log_a(x\cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\ \log_a\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log_a(x) \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \end{aligned}\right\} \quad x, y \text{ des nombres positifs}$$

$$\log_a(x^r) = r\cdot\log_a(x) \qquad \begin{aligned} &x \text{ un nombre positif} \\ &r \text{ un nombre quelconque} \end{aligned}$$

Remarque: $\ln(x) \equiv \log_e(x)$, $e = 2.718281828\ldots$

Challenge du jour

$$\log_a(\sqrt{5}) = \log_a(5^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\log_a(5) \neq (\log_a(5))^{\frac{1}{2}}.$$

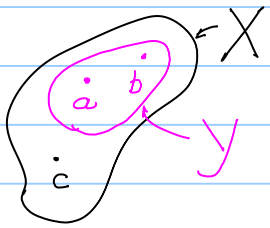
en général !, mais on a égalité pour $a=$?

Chapitre 0

Notions de base

0.1. Ensembles

0.1.1 Notations



$X = \{a, b, c\}$

$Y = \{x \in X : \text{couleur}(x) = \text{magenta}\}$

$\in$	est élément de	$a \in Y$
$\notin$	n'est pas élément de	$c \notin Y$
$\subset$	est un sous-ensemble de	$Y \subset X$
$\not\subset$	n'est pas sous-ensemble de	$X \not\subset Y$
$=$	est le même ensemble que	$Y = Y$
$\neq$	n'est pas le même ensemble que	$X \neq Y$

$\phi \equiv \{\ \}$ ensemble vide, ensemble sans éléments

<u>Nota bene:</u> $\phi \subset X$ pour tout ensemble X

$X \subset X$ pour tout ensemble X

<u>Definition:</u> $\mathcal{P}(X) :=$ l'ensemble dont les éléments sont tous les sous-ensembles de X

Exemple: $X = \{a, b, c\}$ 3 éléments

$\mathcal{P}(X) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, X\}$

$\mathcal{P}(X)$ contient $8 = 2^3$ éléments.

Remarques:
- $\{a,b\} = \{b,a\}$ l'ordre est irrelevant
- $\{a\} \subset X$, $\{a\} \in \mathcal{P}(X)$
- $\{a\} \neq \{\{a\}\}$

Solution du challenge du jour:

Soit $x = \log_a(5)$. On cherche "a" tel que

$$\frac{1}{2} x = \sqrt{x}$$

C'est possible seulement si $x > 0$ et $x^2 = 4x$
c'est-à-dire $x = 4$. Puisque

$$a^{\log_a(5)} = 5 \quad \text{on obtient que} \quad a^x = 5$$

et donc $a = 5^{\frac{1}{4}}$