Chapitre 8

La fonction dérivée

8.1. Dérivée de la composition de deux fonctions

8.1.1. Théorème

$$\begin{tikzcd}
\left]a,b\right[\arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \left]c,d\right[\arrow[r, "g"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$x_0 \in \left]a,b\right[, \qquad y_0 = f(x_0) \in \left]c,d\right[.$$

$$\left.\begin{array}{ll}
f \text{ dérivable } (= \text{différentiable}) \text{ en } x_0 & (1) \\
g \text{ dérivable } (= \text{différentiable}) \text{ en } y_0 & (2)
\end{array}\right\} \text{hypothèses}$$

Théorème: (dérivation en chaîne)

$$\boxed{(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

Ceci se généralise par récurrence (exemples) :

$$f(x) = \cos\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right), \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = -\sin\left(\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (2x), \quad D(f') = \mathbb{R}$$

$$f(x) = (1+x^2)^{(1+x^2)} = e^{(1+x^2)\ln(1+x^2)}$$

$$f'(x) = e^{(1+x^2)\ln(1+x^2)}\left(2x\cdot \ln(1+x^2) + (1+x^2)\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

$$= (1+x^2)^{(1+x^2)}\, 2x\left(1 + \ln(1+x^2)\right)$$

8.1.2. Démonstration du théorème

Par hypothèse on a :

① $\Leftrightarrow f(x_0+h) = \underbrace{f(x_0)}_{=y_0} + \underbrace{f'(x_0)h + r_1(x_0+h)}_{=:\,k(h)\equiv k}$, $\lim_{h\to 0} \frac{r_1(x_0+h)}{h} = 0$

② $\Leftrightarrow g(y_0+k) = g(y_0) + g'(y_0)\,k + r_2(y_0+k)$, $\lim_{k\to 0} \frac{r_2(y_0+k)}{k} = 0$

La remarque 7.7. nous dit :

③ $r_2(y_0+k) = R_2(y_0+k)\cdot k$ avec

$R_2(y_0+k)$ continue en y_0 et $R_2(y_0)=0$

On veut montrer que :

④ $(g\circ f)(x_0+h) = (g\circ f)(x_0) + \boxed{g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)}\, h + r(x_0+h)$

avec $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} r(x_0+h) = 0$

Si on substitue ① dans ② on obtient.

$$(g\circ f)(x_0+h) = g(f(x_0+h)) = g(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0} + \overset{f'(x_0)h + r_1(x_0+h)}{k})$$

$$= g(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0}) + g'(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0})\, \underset{f'(x_0)h + r_1(x_0+h)}{k} + r_2(\underbrace{f(x_0)}_{=y_0} + k)$$

$$= g(f(x_0)) + g'(f(x_0))f'(x_0)h + r(x_0+h)$$

où $r(x_0+h) = g'(f(x_0))\, r_1(x_0+h) + r_2(y_0+k)$

⑤ $$\lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(g'(f(x_0))\frac{r_1(x_0+h)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(R_2(y_0+k)\frac{k}{h}\right) = 0$$

car $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r_1(x_0+h)}{h} = 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{k}{h} = f'(x_0)$ et

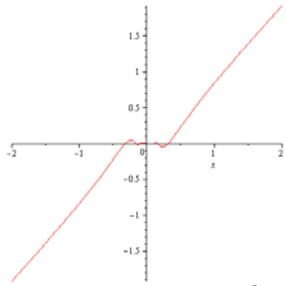
$\lim\limits_{h\to 0} R_2(y_0+k) = R_2(y_0) = 0$ (car R_2 continue en y_0) $\lrcorner$

8.2. Continuité de la fonction dérivée

8.2.1. Un contre-exemple

La fonction f' n'est pas nécessairement continue

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



$D(f) = \mathbb{R}$, f impaire, f continue sur $\mathbb{R}$. En fait

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($\Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R}$)

i) pour $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \frac{-1}{x^2}$$

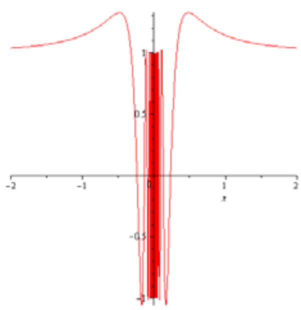
ii) pour $x = 0$ on a (utiliser la définition)

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right) = 0 \quad \text{(par les deux gendarmes)}$$

i) + ii) $\Rightarrow D(f') = \mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Proposition: f' n'est pas continue en $x=0$

Démonstration: soit $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

① $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2\pi n}\underbrace{\sin(2\pi n)}_{=0} - \underbrace{\cos(2\pi n)}_{=1}\right) = -1 \neq 0 = f'(0)$ ┘

Proposition: f' n'admet pas de limite en $x=0$.

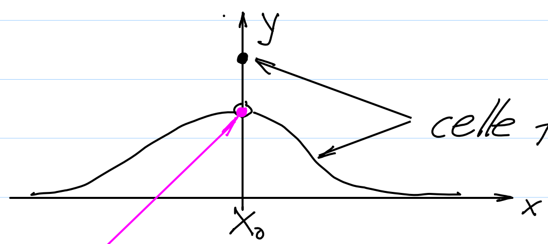
Démonstration: soit $x_n = \frac{1}{2\pi n+\pi}$, $n \in \mathbb{N}$

① et ② différent

② $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2\pi n+\pi}\underbrace{\sin(2\pi n+\pi)}_{=0} - \underbrace{\cos(2\pi n+\pi)}_{=-1}\right) = 1 \neq -1$ ┘

8.2.2. Existence de la limite implique la continuité

La fonction f' n'est pas une fonction quelconque



cette fonction n'est pas possible comme dérivée d'une fonction f

si c'est le graphe d'une fonction dérivée, la valeur en x_0 est là

$\forall \varepsilon$, $\exists$A. v. B. .

Théorème 8.2. Soit $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[\subset D$, $a<b$, f continue sur $]a,b[$, dérivable sur $]a,b[\setminus \{x_0\}$, et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \ (A)}$ alors

$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } f'(x_0) = \ell \ (B)}$

Démonstration: voir plus loin. Utilise le théorème des accroissements finis généralisé. ┘

Attention à la logique: dans l'exemple dans 8.2.1 f' n'admet pas de limite en $x_0 = 0$. Néanmoins f est dérivable en $x_0 = 0$. C'est un contre-exemple à $\underbrace{\text{la contraposée de}}_{\neg A \Rightarrow \neg B \text{ faux}}$, $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\text{la réciproque}}_{B \Rightarrow A \text{ faux}}$, du $\underbrace{\text{théorème 8.2}}_{A \Rightarrow B \text{ vrai}}$

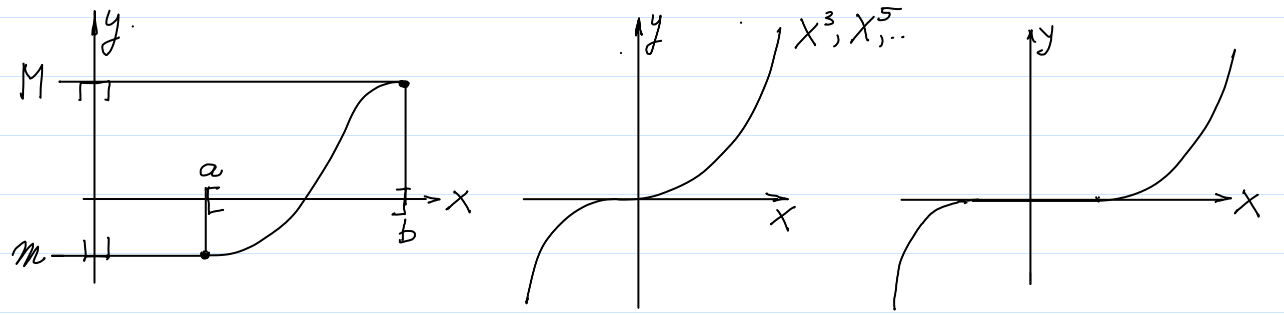
par le contre-exemple:

8.3. Fonctions réciproques

8.3.1. Continuité de la fonction réciproque

Critère: toute fonction strictement monotone est injective

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \gtrless f(x_2)$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$



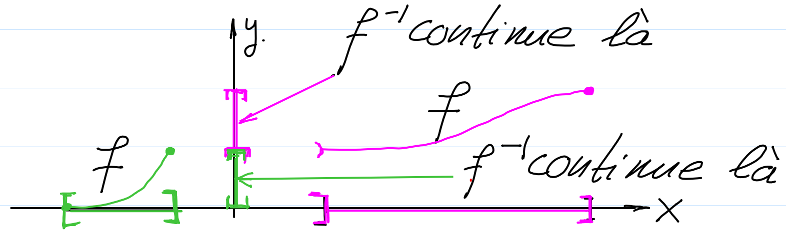
strictement monotone — strictement monotone — monotone, mais pas strictement.

Continuité de la fonction réciproque

Rappel: si une fonction $f: D(f) \to \mathrm{Im}(f)$ est injective, alors elle est bijective et on a la fonction réciproque $f^{-1}: \mathrm{Im}(f) \to D(f)$.

Théorème: la réciproque d'une fonction bijective continue est continue sur l'image de tout intervalle.

Explication:

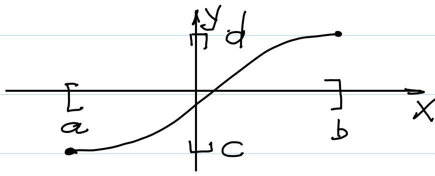


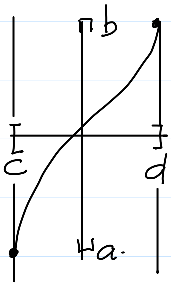
Démonstration: "laborieuse", utilise que l'image d'un intervalle est un intervalle et la définition de la continuité.

8.3.2. Dérivabilité de la fonction réciproque

Théorème: La réciproque d'une fonction bijective, dérivable est dérivable sur l'image de tout intervalle I tel que $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$

Explication





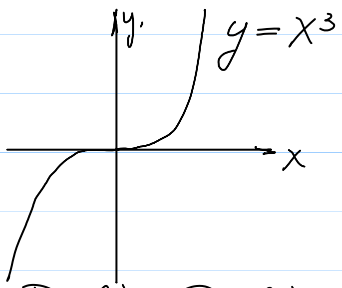
$D(f^{-1}) = [c, d]$

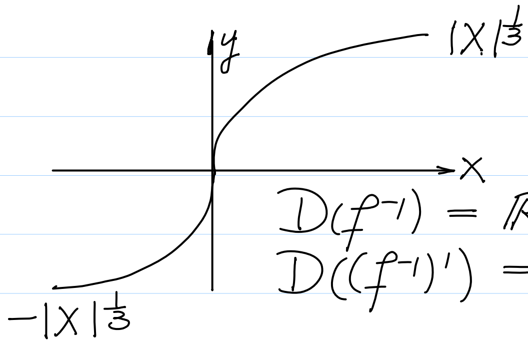
f^{-1} continue sur $[c,d]$

$D((f^{-1})') =]c, d[$

$D(f) = D(f') = [a, b]$

$f'(a) = f'(b) = 0$





$D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

$D((f^{-1})') = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$D(f) = D(f') = \mathbb{R}$

attention: $f'(0) = 0$

8.3.3. Identité pour $(f^{-1})'$

Théorème: Soit I un intervalle, $I \neq \emptyset$, $f: I \to \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ bijective, dérivable, $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$. Alors

$$\forall y \in \mathrm{Im}(f) = D(f^{-1}), \quad \boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

Démonstration: Soit $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

On a donc : $\forall y \in D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$, $f(f^{-1}(y)) = y$

Par dérivation en chaîne on obtient

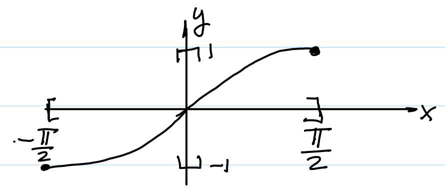
$\forall y \in \mathrm{Im}(f)$, $f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$ ← dérivée de y

Exemples:

1) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} = D(f)$.

$f^{-1}(x) = \ln(x)$, $\mathrm{Im}(f) = D(f^{-1}) =]0, \infty[$

$\forall x \in D(f^{-1}) =]0,\infty[$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{e^{\ln(x)}} = \dfrac{1}{x}$

2) 

$f(x) = \sin(x)$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f'(x) = \cos(x) \neq 0$ si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$f^{-1}(x) = \arcsin(x)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(x))^2}}$$

$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$ si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

et donc, $\forall x \in]-1, 1[= \sin(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

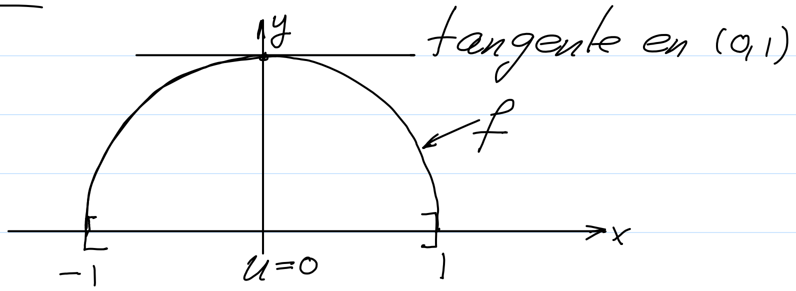
8.4. Théorème de Rolle

<u>Théorème:</u> soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $[a,b] \subset D$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a)=f(b)=0$, alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $f'(u)=0$

Explication/exemple

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$D(f) = [-1,1]$



f continue sur $[-1,1]$
f dérivable sur $]-1,1[$.

— FACULTATIF —

Démonstration :

i) f continue sur $[a,b]$. Alors il existe un maximum M et un minimum m, et $f([a,b]) = [m, M]$.

ii) si $m = M = 0 \iff \forall x \in [a,b]\,,\ f(x) = 0$
$\Rightarrow \forall u \in\,]a,b[\,,\ f'(u) = 0.$

iii) ou bien M ou m sont différents de zéro.

cas $\overset{m \neq 0}{M \neq 0} \Rightarrow \exists\, c \in\,]a\ b[$ tel que $f(c) = \overset{m}{M}$

c.-à-d :

$$f(x) \overset{\geqslant}{\leqslant} \overset{M \,\| \, m}{f(c)} \quad , \forall x \in [a,b].$$

Donc, pour $x \neq c$,

$$\underbrace{0 \overset{\geqslant}{\leqslant}}_{x<c \ \text{①}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \underbrace{\overset{\geqslant}{\leqslant} 0}_{x>c. \ \text{②}}$$

① $\Rightarrow 0 \overset{\geqslant}{\leqslant} \lim\limits_{x \to c-} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ (car f dérivable en c)

② $\Rightarrow 0 \overset{\leqslant}{\geqslant} \lim\limits_{x \to c+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ (car f dérivable en c)

Donc $0 \overset{\geqslant}{\leqslant} f'(c) \overset{\geqslant}{\leqslant} 0 \Rightarrow f'(c) = 0.$

On a donc démontré le théorème en choisissant $u = c$