Remarque 7.7. (représentation du reste)

Par (*) $r(x_0)=0$, et par (**) $r(x)$ est dérivable en x_0 avec dérivée zéro:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{r(x)-r(x_0)}{x-x_0} = 0$$

La fonction

$$R(x) := \begin{cases} \dfrac{r(x)}{x-x_0} & , \ x \in]a,b[\setminus \{x_0\}. \\ 0 & , \ x = x_0 \end{cases}$$

est donc continue en x_0 et on obtient que

$$r(x) = R(x)(x-x_0) \qquad (***)$$

avec R une fonction continue en x_0 et $R(x_0)=0$.

Remarque: $(***) \iff r(x_0+h) = R(x_0+h)\cdot h$

avec $\lim_{h\to 0} R(x_0+h) = R(x_0) = 0$

7.8. Dérivable $\iff$ différentiable

dérivable: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = d \in \mathbb{R}$.

différentiable: $f(x) = f(x_0) + \alpha\cdot(x-x_0) + r(x) \qquad (*)$

$\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$, t.q., avec $\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0 \qquad (**)$

De plus on a montré que $r(x) = R(x)\cdot(x-x_0)$ avec R continue en x_0 et $R(x_0)=0$ $\Big\}$ $(***)$

Démonstration:

"$\Rightarrow$" Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = d$

On choisit $\alpha = d$ et on montre que $r(x)$ défini par $(*)$ satisfait $(**)$. De $(*)$ on a (avec $\alpha = d$)

$$r(x) = f(x) - f(x_0) - d\cdot(x-x_0)$$

et donc, pour $x \neq x_0$:

$$\frac{r(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - d$$

et donc

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = \left(\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) - d = d - d = 0$$

ce qui montre que f est differentiable en x_0 avec $\alpha = d$.

"$\Leftarrow$" Supposons que f est differentiable (avec α)

De $(*)$ et $(***)$ on obtient pour $x \neq x_0$ que

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha + R(x).$$

et donc, comme R est continue en x_0 et $R(x_0)=0$, on obtient que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \alpha$$

ce qui montre que f est dérivable en x_0 avec $d = \alpha$

Exemple: $\sin(x)$ est dérivable en $x_0 = 0$ et donc différentiable. On a donc

voir 7.6

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(0) + 1\cdot(x-0) + R(x)\cdot(x-0)\\ &= 0 + x + R(x)\cdot x\\ &= x + R(x)\cdot x\end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to 0} R(x) = 0$

Remarque: on récupère facilement la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1 + \lim_{x\to 0} R(x) = 1$$

7.9. La fonction dérivée

Définition: on dit que $f: D \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]a,b[\subset D$, si f est dérivable en tout point $x_0 \in]a,b[$.

Définition: Soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$. Alors on peut définir la fonction f' appelée la dérivée de f par

$$f'(x) := d\Big|_x = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

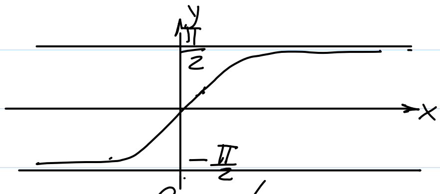
Attention! ne pas confondre la dérivée de f en un point x_0 (un nombre!) avec la dérivée de f (la fonction f').

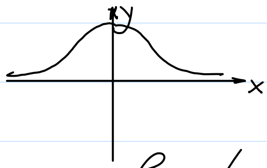
<u>Définition</u>: (fonction dérivée d'ordre n) si la fonction f' est dérivable sur $]a,b[$ on peut définir la fonction f'' appelée la deuxième dérivée de f par $f''(x) = (f')'(x)$ et puis par récurrence, si la $(n-1)$-ème dérivée de f est dérivable sur $]a,b[$ la fonction $f^{(n)}$ (la n-ème dérivée de f) par $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$, $n = 2, 3, \dots$

<u>Exemples (sans démonstration, à savoir par cœur)</u>

f	f'	$f^{(n)}$, $n=2,3,\dots$
1	0	0
x	1	0
$m \in \mathbb{N}^*$ x^m	$m \cdot x^{m-1}$	$m(m-1)\dots(m-n+1)\,x^{m-n}$, $n \leq m$; 0, $n > m$
$p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ x^p, $x>0$	$p \cdot x^{p-1}$	$p(p-1)\cdots(p-n+1)\,x^{p-n}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\sin(x) & n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos(x) & n \text{ impair} \end{cases}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}\cos(x) & n \text{ pair} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin(x) & n \text{ impair} \end{cases}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\begin{cases} \sinh(x) & n \text{ pair} \\ \cosh(x) & n \text{ impair} \end{cases}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\begin{cases} \cosh(x) & n \text{ pair} \\ \sinh(x) & n \text{ impair} \end{cases}$
$\lvert x\rvert$, $x>0$	1	0
$\lvert x\rvert$, $x<0$	-1	0

$x \in \mathbb{R}^*$	$\ln(\lvert x \rvert)$	$\frac{1}{x}$	$(-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$.
	e^x	e^x	e^x
	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	





pas necessaire

une fonction impaire — une fonction paire

7.10. Derivabilité (en un point) implique continuité (en ce point)

Théorème: une fonction qui est $\underbrace{\text{dérivable en } x_0}_{A}$ est $\underbrace{\text{continue en } x_0}_{B}$

$A \Rightarrow B$

Démonstration:

pourquoi ?

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,(x-x_0)\right)$$

pourquoi ?

$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)}_{=d} \underbrace{\left(\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\right)}_{=0}$$

par A

$$= d\cdot 0 = 0.$$

donc $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

La réciproque du théorème $(B \Rightarrow A)$ est fausse !

Contre-exemple : $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$.

f est continue en x_0 : $\lim\limits_{x\to 0+} |x| = \lim\limits_{x\to 0+} x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0-} |x| = \lim\limits_{x\to 0-} (-x) = \lim\limits_{x\to 0} (-x) = 0$

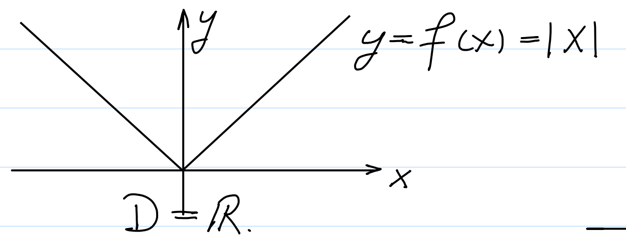
même valeur.

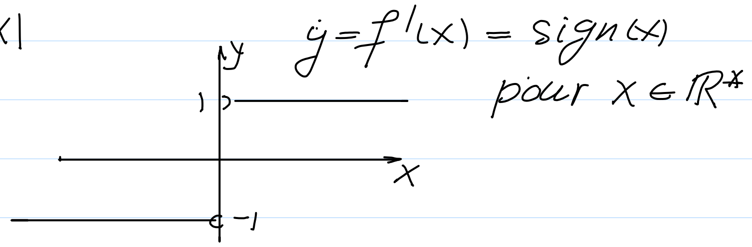
On a donc $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0 = |0| = f(0)$.

f n'est pas dérivable en 0.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{(-x)}{x} = \lim_{x\to 0-} (-1) = -1 \neq 1.$$





7.11. Intervalles fermés

7.11.1. Définitions et remarques

Définition : une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable à droite (à gauche) en $x_0 \in [a, b[\subset D$ (en $x_0 \in]a, b] \subset D$) si

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = d_+ \in \mathbb{R} \quad \text{(dérivée à droite)}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = d_- \in \mathbb{R} \quad \text{(dérivée à gauche)}$$

Remarque: f dérivable en $x_0 \in]a,b[\Leftrightarrow f$ dérivable à droite en x_0 et f dérivable à gauche en x_0 et les dérivées à gauche et à droite sont égales.

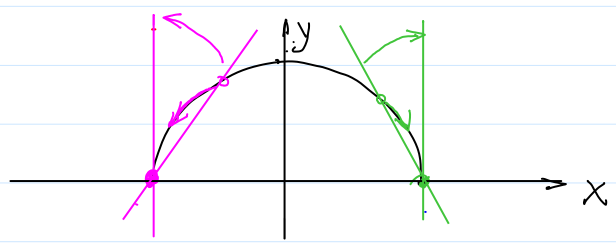
Définition: une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a,b] \subset D$ si f est dérivable sur $]a,b[$, dérivable à droite en a et dérivable à gauche en b.

Remarque: si $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, c'est-à-dire si le domaine de définition de f est un intervalle fermé alors la limite de $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ à droite en a est égale à la limite en a et pour cette raison nous écrivons <u>dans ce cas</u> $f'(a)$ pour la dérivée à droite en a et de même $f'(b)$ pour la dérivée à gauche en b.

7.11.2. Un contre-exemple

La fonction $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ (mais pas sur $[-1,1]$!).

(le montrer !)



7.12. Opérations algébriques pour les dérivées

Soient $f, g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ des fonction dérivables sur $]a,b[$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors on a :

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' \qquad \text{sur }]a,b[$$

$$(f \cdot g)' = f' g + f \cdot g' \qquad \text{sur }]a,b[$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g} - f \cdot \frac{g'}{g^2} \qquad \text{sur } \{x \in]a,b[: g(x) \neq 0\}$$

<u>Exemple:</u> soit $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

alors

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1} \underset{k=\ell+1}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{\ell+1} (\ell+1) x^{\ell}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} (k+1) x^k$$