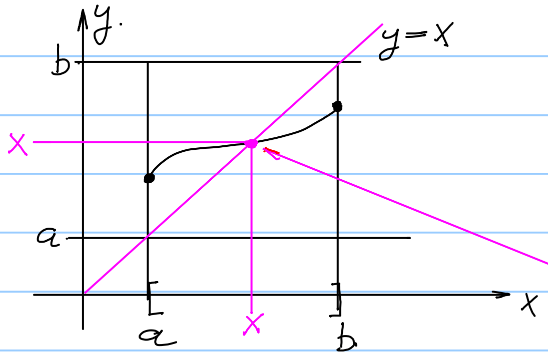
7.5 Application du théorème des valeurs intermédiaires aux suites définies par récurrence

Définition: une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet $x \in D$ comme point fixe si $f(x) = x$.

Théorème (du point fixe): soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) \subset [a,b]$ admet un point fixe.



$\mathrm{Im}(f) = [m, M] \subset [a,b]$.

point fixe de f

Démonstration

La fonction $g(x) = x - f(x)$ est continue sur $[a,b]$, $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$ et par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in [a,b]$ tel que $g(x) = 0 \iff f(x) = x$.

Remarque: pour les suites définies par récurrence par une fonction continue, ce théorème permet d'identifier les limites éventuelles.

7.7. Definition (différentiable)

Remarque: si f est continue en x_0 on a que

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) - f(x_0) = 0$$

Remarque: si f est continue en x_0 on a que

$$f(x) = f(x_0) + r(x) \qquad (*)$$

avec

$$\lim_{x\to x_0} r(x) = 0 \qquad (**)$$

(*) avec (**):

f admet un développement limité d'ordre zéro.

Définition (différentiable): une fonction f est différentiable en x_0, s'il existe un nombre $\alpha\in\mathbb{R}$ et une fonction $r:]a,b[\to \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in]a,b[$.

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \alpha\cdot(x-x_0)}_{\text{l'équation de la tangente}} + r(x) \qquad (*)$$

avec

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0 \qquad (**)$$

(*) avec (**):

f admet un développement limité d'ordre un

Remarque: $(*) \Leftrightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + \alpha\cdot h + r(x_0+h)$

$$(**) \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{r(x_0+h)}{h} = 0$$