Chapitre 7

Fonctions continues et fonctions dérivables

7.1. Fonctions continues sur un intervalle fermé

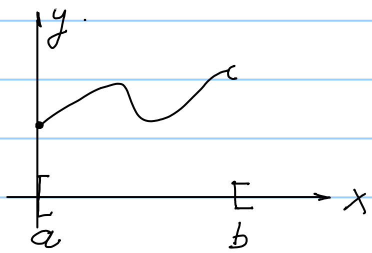
Définition: une fonction $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ est <u>continue à droite</u> en $x_0 \in D$, si

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$$

et elle est <u>continue à gauche</u> en $x_0 \in D$, si

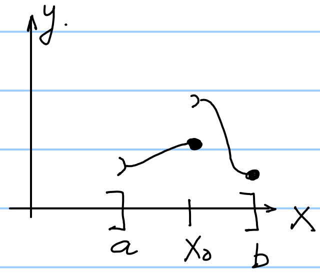
$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$$

Exemples

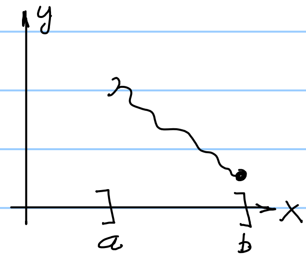


$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$

f continue à droite en a.



f continue à gauche en x_0 et en b, mais f n'est pas continue en x_0



$\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

f continue à gauche en b.

Remarque: f continue en $x_0 \iff f$ continue à droite en x_0 et f continue à gauche en x_0

Remarque: une fonction $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc continue sur $[a,b] \subset D$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ si elle est continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.

7.2. Minimum et maximum

Théorème 1: soit $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Toute fonction continue $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum, c.-à-d. il existe $c \in [a,b]$ et $d \in [a,b]$ tels que, pour tout $x \in [a,b]$,
$$\underbrace{f(c)}_{=:m} \leq f(x) \leq \underbrace{f(d)}_{=:M}.$$

Idées: i) (x_n), $x_n \in [a,b]$ une suite. Par B.W il existe $(\tilde{x}_k)$, $\tilde{x}_k := x_{n_k}$ tel que $\lim_{k\to} \tilde{x}_k = x^* \in \mathbb{R}$.
$a \leq \tilde{x}_k \leq b \Rightarrow x^* \in [a,b]$
f continue $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(\tilde{x}_k) = f(\lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k) = f(x^*)$

ii) $\operatorname{Im}(f)$ est borné. Sinon il existe une suite (x_n) telle que $|f(x_n)| \geq n$ en contradiction avec i).

iii) $M := \sup \operatorname{Im}(f)$ est un maximum. Il existe une suite (x_n), telle que $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$ pour $n=1,2,\ldots$ et donc avec i) $f(x^*) = M$.

Notation:
$$m := \min_{x\in[a,b]} f(x) \equiv \text{minimum } \operatorname{Im}(f) \in \mathbb{R}$$
$$M := \max_{x\in[a,b]} f(x) \equiv \text{maximum } \underbrace{\operatorname{Im}(f)}_{} \in \mathbb{R}$$

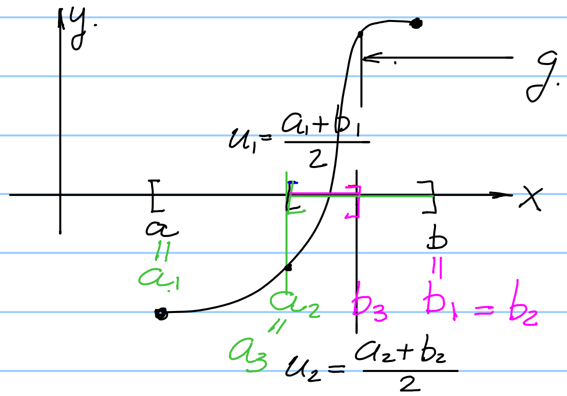
l'ensemble image de $f = f([a,b]) \subset \mathbb{R}$

7.3. Méthode de la bissection. ($\equiv$ méthode de dichotomie)

7.3.1. Proposition et démonstration

Proposition: Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, telle que $g(a)<0$ et $g(b)>0$. Alors il existe $u \in]a,b[$ tel que $g(u)=0$.

Démonstration



On pose $a_1 = a$, $b_1 = b$ et puis on définit pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

et puis : si $g(u_n) < 0$: $a_{n+1} = u_n$, $b_{n+1} = b_n$
si $g(u_n) > 0$: $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = u_n$
si $g(u_n) = 0$: "STOP", $u_n =: u \in]a,b[$

Dans le cas où $\forall n$, $g(u_n) \neq 0$ on obtient de cette manière une suite croissante (a_n) et une suite décroissante (b_n) telles que

$$\forall n, \; a_n \leq b_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0 \qquad (*)$$

$$\forall n, \; g(a_n) \leq 0 \leq g(b_n).$$

De $(*)$ il suit (voir 3.11. Bon à savoir) que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: u \in]a,b[.$$

Puisque la fonction g est continue sur $[a,b]$ elle est continue en u et donc:

$$\lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{n\to\infty} g(b_n) = g(\lim_{n\to\infty} a_n) = g(\lim_{n\to\infty} b_n) = g(u)$$

et on obtient avec le théorème des deux gendarmes:

$$\begin{array}{ccccc} g(a_n) & \leq & 0 & \leq & g(b_n) \\ \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ g(u) & \leq & 0 & \leq & g(u) \end{array} \Longrightarrow g(u) = 0.$$

7.3.2. Exemple

Soit $g(x) = x^2 - 2$, $g: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$g(1) = 1^2 - 2 = -1 < 0$, $g(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0$

$a_1 = 1$, $b_1 = 2$; $u_1 = \frac{1}{2}(1+2) = \frac{3}{2}$, $g(\frac{3}{2}) = \frac{9}{4} - 2 = \frac{1}{4} > 0$; $a_2 = 1$, $b_2 = \frac{3}{2}$; $u_2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{2}) = \frac{5}{4}$;

$g(\frac{5}{4}) = \frac{25}{16} - \frac{32}{16} = -\frac{7}{16} < 0$; $a_3 = \frac{5}{4}$ etc. ; $b_3 = \frac{3}{2}$ etc.

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ 1.25}}{\frac{5}{4}} \leq \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{\sqrt{2}} \leq \underset{\substack{\parallel \\ \frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$g(\sqrt{2}) = 0.$

<u>Avantage</u>: la convergence est guarantie

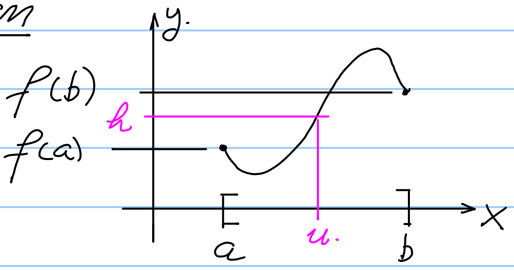
<u>Désavantage</u>: la convergence est seulement linéaire.

7.4. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2 (théorème des valeurs intermédiaires). Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ prend (au moins une fois) toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.

Remarque 7.4 ceci montre en particulier que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

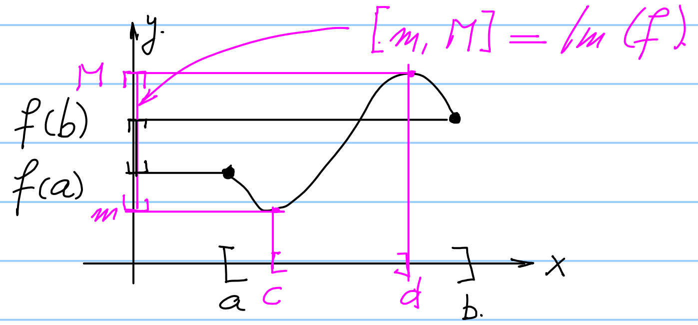
Démonstration



Supposons que $f(a) \leq f(b)$. Soit $h \in [f(a), f(b)]$ et montrons qu'il existe $u \in [a,b]$ tel que $f(u) = h$. Le cas où $h = f(a)$ ou $h = f(b)$ (en particulier si $f(a) = f(b)$) est trivial (choisir $u = a$ ou $u = b$). Soit donc $f(a) < f(b)$ et $h \in]f(a), f(b)[$. On pose alors $g(x) = f(x) - h$. La fonction g est continue sur $[a,b]$, $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$ et par la méthode de bissection il existe donc $u \in]a,b[$ tel que $g(u) = 0$ $\Leftrightarrow f(u) = h$. Dans le cas où $f(a) > f(b)$ on choisit $h \in]f(b), f(a)[$ et pose $g(x) = h - f(x)$ avec les mêmes conclusions. $\square$

Théorème 3 : soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$. Alors $\mathrm{Im}(f) = [m, M]$, où m est le minimum et M le maximum de f sur $[a,b]$.

Démonstration



Par le théorème 1 il existe $c, d \in [a,b]$, tels que $f(c) = m$ et $f(d) = M$. Si $m = M$ on a que pour tout $x \in [a,b]$ $f(x) = m = M$ et le théorème est démontré. Si $c < d$ (resp. $c > d$) on restraint f à l'intervalle $[c,d]$ (resp. $[d,c]$) et puis on utilise le théorème 2 pour $h \in]m, M[$.

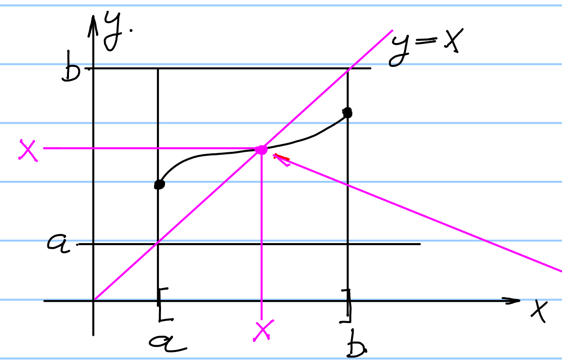
Remarque: par la remarque 7.4 on sait que l'image de f est un intervalle ce qui implique directement que $Im(f) = [m, M]$

7.5 Application aux suites definies par récurrence

Définition: une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet $x \in D$ comme point fixe si $f(x) = x$.

Théorème (du point fixe): soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \underline{Im(f) \subset [a,b]}$ admet un point fixe.



$Im(f) = [m, M] \subset [a, b]$.

point fixe de f

Démonstration

La fonction $g(x) = x - f(x)$ est continue sur $[a,b]$, $g(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$ et par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x \in [a,b]$ tel que $g(x) = 0 \iff f(x) = x$.

Remarque: pour les suites définies par récurrence par une fonction continue, ce théorème permet d'identifier les limites éventuelles

7.6. Définition (dérivable)

Dans cette section, sauf si indiqué autrement, $f : D \to \mathbb{R}$, et $x_0 \in]a,b[\subset D \subset \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

Définition: (dérivable) une fonction f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: d \quad \in \mathbb{R}, \qquad (*)$$

existe

Notation: on écrira $d|_{x_0}$ s'il est nécessaire de garder une trace du point x_0.

Terminologie: le nombre $d|_{x_0}$ est appelé la dérivée de f en x_0.

Remarque:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{\text{poser } x=x_0+h}{=} \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Remarque: si f est continue en x_0 on a que

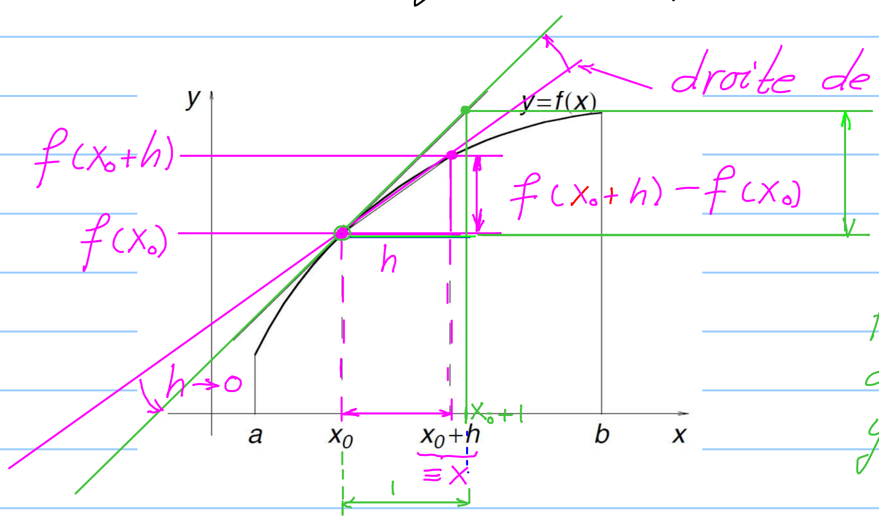
$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right) - f(x_0) = 0 \qquad (**)$$

mais $(**)$ est moins restrictif que $(*)$. Voir 7.10

Exemple: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = 1.$

La fonction $\sin(x)$ est donc dérivable en $x_0=0$ et sa dérivée vaut $d=1$.

Interprétation géométrique



$d|_{x_0}$ est la pente de la tangente au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$. L'équation de cette tangente est:

$$y = f(x_0) + d|_{x_0}\cdot(x-x_0).$$

Exemple: