6.7. Limite épointée et composition des fonctions

Soit
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h = g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \\ x^* \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] & y^* \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] & \ell \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \end{tikzcd}$$

Si $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to x^*\\ x\neq x^*}} f(x) = y^*}$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{y\to y^*\\ y\neq y^*}} g(y) = \ell}$

Alors (attention à la condition (*) !)

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x^*\\ x\neq x^*}} g(f(x)) = \ell}$$

on suppose implicitement que $f(x_n) \neq y^*$ sur des suites (x_n)

pourvu que pour toute suite (x_n) telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, $x_n \neq x^*$, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$ $y_n = f(x_n) \neq y^*$ (*)

Remarque: la condition (*) disparaîtra pour f, g des fonctions continues (à définir)

6.8. Définition (continuité)

Notation: A partir de maintenant nous écrivons x_0 au lieu de x^* pour les points qui nous intéressent

Définition: $x_0 \in D \subset \mathbb{R}$ est appelé un point isolé de D, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$$]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\cap D = \{x_0\}$$

Remarque: si $x^* \in D$ n'est pas un point isolé, alors il existe une suite (x_n) de points, $x_n \in D$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

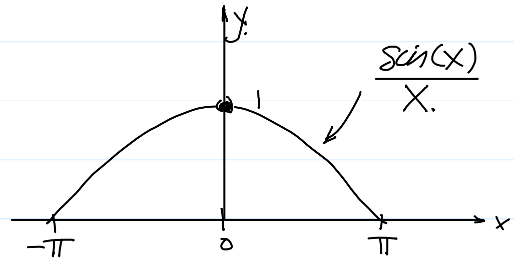
Définition: une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, est continue en $x_0 \in D$, si x_0 est un point isolé de D ou si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

deux informations: f admet une limite et la valeur de celle limite est $f(x_0)$.

Exemple 6.8

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

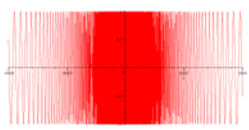


$f(x)$ est continue en 0, car $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$.

Ensembles de fonctions

$f : D \to \mathbb{R}$ f n'admet pas de limite en x_0		$f : D \to \mathbb{R}, x_0 \notin D$ $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$		$f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$ $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$	$\supset$	$f : D \to \mathbb{R}, x_0 \in D$ $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\ell = f(x_0)$
1		2		3		4

Exemples:



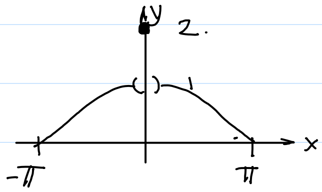
1. i) $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $D(f) = \mathbb{R}^*$, pas de limite en $x_0 = 0 \notin D(f)$

   ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, pas de limite en $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. i) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, $D(f) = \mathbb{R}^*$, $x_0 = 0 \notin D(f)$, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$

   ii) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$.

③ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 2 = f(0)$$

④ Exemple 6.8

Remarque Si f est continue en $x_0 \in D$, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} x\right)$$

6.9. Définition de la continuité en un point par ε et δ

Voir aussi 6.5. (définition de la limite avec ε et δ).

Définition: on dit qu'une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in D$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que $\forall x \in D$, $(0 <)\, |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

facultatif dans la définition de la continuité, car pour $x = x_0$ l'implication est toujours vrai. De plus, sans cette condition la définition s'applique aussi aux points isolés

6.10. Fonctions continues et prolongement par continuité

Définition (fonctions continues)

Une fonction $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$ est dite continue ou continue sur D, si f est continue en tout $x_0 \in D$

Prolongement par continuité (voir Exemple 6.8)

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, mais $x_0 \notin D(f) \equiv D$, alors on peut définir la fonction $\hat{f}_{x_0} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}_{x_0}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ \ell = \lim_{x\to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

$\hat{f}_{x_0}$ est continue en x_0 par définition.

Remarque: souvent on écrit de nouveau f au lieu de $\hat{f}_{x_0}$.

Exemples: $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$ $\xrightarrow{\text{prolongement par continuité}}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1$

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^x$ $\xrightarrow{\text{prolongement par continuité}}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2^x$.

6.11. Fonctions continues sur un intervalle ouvert

Dans cette section on suppose $f : D \to \mathbb{R}$ continue sur $I =]a, b[\subset D$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, c'est-à-dire que la restriction de f à I est une fonction continue.

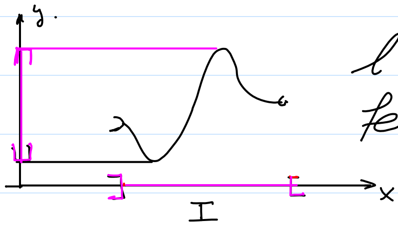
Rappel: soit $a \in \mathbb{R}$. Alors les intervalles non bornés

$]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont ouverts

$]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont fermés

Remarque 1: l'image $f(I)$ d'un intervalle ouvert I par une fonction f continue sur I est un intervalle, mais $f(I)$ n'est ni forcément ouvert ni forcément borné

Exemple



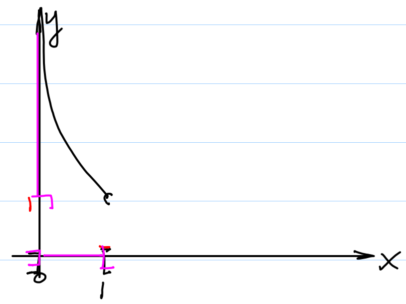
l'image est un intervalle fermé.

Remarque 2: l'image $f(I)$ d'un intervalle ouvert I par une fonction strictement monotone et continue sur I est un intervalle ouvert, mais $f(I)$ n'est pas forcément borné

Exemples:

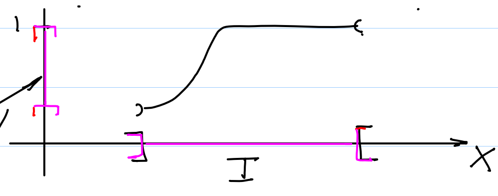
i) $f :]0,1[\longrightarrow]1,\infty[$

$\quad x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}.$



ii) attention, si f est monotone mais pas strictement monotone:

l'image n'est pas ouvert



Fonctions élémentaires

Remarque 3: la composition de deux fonctions continues est une fonction continue sur son domaine de définition (supposé non vide).

Définition: une fonction élémentaire est une fonction construite à partir de fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques, sinus et cosinus et un nombre fini d'opérations $+, \cdot, /, \circ$.

composition

Théorème: une fonction élémentaire est continue sur son domaine de définition.

Conséquence: pour f une fonction élémentaire on a pour tout $x_0 \in D(f)$ que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemples

- $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$ (utilisé en 6.4.3 2))
- $\lim\limits_{x \to 0} \exp(\cos(\ln(\sqrt{\cosh(x)}))) = e^1 = e$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \sin(\frac{1}{x}) = \sin(\frac{1}{x_0})$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^*$

mais $\sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en $x_0 = 0$.