# Chapitre 6

## Fonctions continues

### 6.1 Opérations algébriques sur les limites

Dans cette section $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

**Si** $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ \left[\begin{smallmatrix} x \neq x^* \\ x > x^* \\ x < x^* \end{smallmatrix}\right]}} f(x) = a$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ \left[\begin{smallmatrix} x \neq x^* \\ x > x^* \\ x < x^* \end{smallmatrix}\right]}} g(x) = b$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

**Alors**

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ [\,\vdots\,]}} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{\substack{x \to x^* \\ [\dots]}} f(x) + \lim_{\substack{x \to x^* \\ [\dots]}} g(x) = a + b$$

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ [\,\vdots\,]}} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \Big(\lim_{\substack{x \to x^* \\ [\,\vdots\,]}} f(x)\Big) \cdot \Big(\lim_{\substack{x \to x^* \\ [\,\vdots\,]}} g(x)\Big) = a \cdot b.$$

$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ [\,\vdots\,]}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ [\,\vdots\,]}} f(x)}{\lim\limits_{\substack{x \to x^* \\ [\,\vdots\,]}} g(x)} = \frac{a}{b}, \text{ si } b \neq 0.$$

[le démontrer ! utiliser les lois algébriques pour les suites]

**Exemple:** $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} (3x^2 - 2x + 5) = \; \dots \; =$

$$= 3 \cdot \Big(\underbrace{\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} x}_{=2}\Big)^2 - 2\Big(\underbrace{\lim_{\substack{x \to 2 \\ x \neq 2}} x}_{=2}\Big) + 5 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 5 = 13$$

$\longleftarrow$ par définition de la limite

## 6.2. "Limites infinies" et comportement à $\pm\infty$

**Attention:** à partir de maintenant nous écrivons $\lim\limits_{x\to x^*} f(x)$ au lieu de $\lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x\neq x^*}} f(x)$.

**Conventions:**

1) $\lim\limits_{\boxed{x\to x^*}} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) veut dire que pour toute suite $(x_n)$, $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x^*$ telle que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \in \mathbb{R}}$

on a $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty}$ (resp. $-\infty$)

Voir 3.6

2) $\lim\limits_{\boxed{x\to+\infty}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$) veut dire que pour toute suite $(x_n)$, $x_n \in D(f)$, telle que

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$)

Voir 3.6

$\lim\limits_{\boxed{x\to-\infty}} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$) veut dire que pour toute suite $(x_n)$, $x_n \in D(f)$, telle que

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty}$ on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ (resp. $+\infty$ ou $-\infty$)

Voir 3.6

## 6.3. Théorème des deux gendarmes pour les fonctions

**Théorème:** soient $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, et soit $x^* \in \mathbb{R}$ ou $x^* \in \{+\infty, -\infty\}$, tel que $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$ pour une suite $(x_n)$, $x_n \in D$, $x_n \neq x^*$.

**Supposons:**

i) cas $x^* \in \mathbb{R}$: $\exists\, \varepsilon > 0$, tel que $\forall x \in D$
$$|x - x^*| \leq \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

cas $x^* = +\infty$: $\exists\, \varepsilon > 0$, tel que $\forall x \in D$
$$x > \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

cas $x^* = -\infty$: $\exists\, \varepsilon < 0$, tel que $\forall x \in D$
$$x < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

ii) $\lim_{x \to x^*} f(x) = \lim_{x \to x^*} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$

**Alors:** $\lim_{x \to x^*} h(x) = \ell$

**Démonstration** (avec $\varepsilon$ donné par i))

Soit $(x_n)$ une suite dans $D$, $x_n \neq x^*$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$.
Par définition de $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, il existe $n_0$, tel que $\forall n \geq n_0$, $|x_n - x^*| \leq \varepsilon$ (cas où $x^* \in \mathbb{R}$), $x_n \geq \varepsilon$ (cas où $x^* = +\infty$) $x_n \leq \varepsilon$ (cas où $x^* = -\infty$), et on a donc pour tout $n \geq n_0$:

$$\begin{array}{ccccc} f(x_n) & \leq & h(x_n) & \leq & g(x_n) \\ \text{par ii)} \Big\downarrow n\to\infty & & \Big\downarrow n\to\infty & & \text{par ii)} \Big\downarrow n\to\infty \\ \ell & & \underbrace{\ell} & & \ell \end{array}$$

par le théorème des deux gendarmes pour les suites.

## 6.4. Exemples

### 6.4.1 Fonctions algébriques (deux gendarmes)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}}_{=:h(x)}$$

<u>il suffit de considérer $x>0$</u> (pourquoi ?)

on a $h(x)\leqslant\dfrac{x}{\sqrt{x^2}+x}=\dfrac{1}{2}=:g(x)$

et $h(x)\geqslant\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+1}+x}=\dfrac{x}{x+1+x}=\dfrac{1}{2+\frac{1}{x}}=:f(x)$.

on a donc

$$\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\leqslant h(x)\leqslant\frac{1}{2}\qquad(x>0)$$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\xrightarrow{x\to\infty}\frac{1}{2},\qquad h(x)\xrightarrow{x\to\infty}\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{2}\xrightarrow{x\to\infty}\frac{1}{2}.$$

utiliser la définition de la limite et le fait que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$

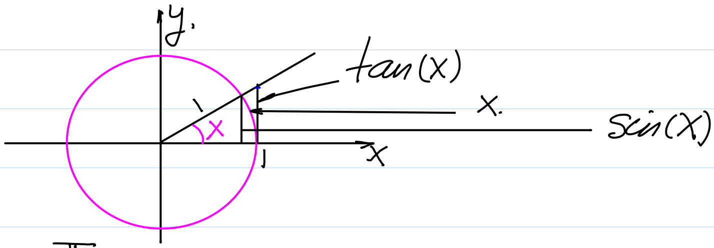
pour toute suite $(x_n)$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$

contrôler tous les détails pour une bonne compréhension !

par le théorème des deux gendarmes pour les fonctions

## 6.4.2. Fonctions trigonométriques (deux gendarmes)

**Rappel**




Pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ on a $0 \leq \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1 \quad (*)$, on peut supposer $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

$\cos(x)$ étant une fonction paire, il suffit de contrôler $x>0$:

$\lim\limits_{x \to 0+} \cos(x) = 1 \implies (*)$.

+, car $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$

On a $1 \geq \cos(x) = +\sqrt{1 - \sin(x)^2} \geq \sqrt{1 - 2\sin(x)^2 + \sin(x)^4} =$

$$= 1 - \sin(x)^2 \geq 1 - x^2.$$

Donc, pour $0 < x \leq \frac{\pi}{4}$ $\quad 1 \geq \cos(x) \geq 1 - x^2$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \geq & \cos(x) & \geq & 1 - x^2 \\ \Big\downarrow {\scriptstyle x \to 0,\ x>0} & & \Big\downarrow {\scriptstyle x \to 0,\ x>0} & & \Big\downarrow {\scriptstyle x \to 0,\ x>0} \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

**Remarque:** $\underbrace{\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \cos(x) = 1}_{(*)} \implies \lim\limits_{n \to \infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1.$

$x_n = \frac{1}{n}$ est une suite particulière déjà contrôlée dans $(*)$.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\text{une fonction paire}} = 1 \quad (*)$.

une fonction paire, $(*) \iff \lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

pour $0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}$ on a (il suffit de regarder ces $x$).

$$0 < \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$ | diviser par $\sin(x)$

$$\Longrightarrow \quad 1 \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$$ | théorème des deux gendarmes.

$$\begin{array}{ccc} \cos(x) & \dfrac{\sin(x)}{x} & 1 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle x\to 0+} & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to 0+} & \Big\downarrow{\scriptstyle x\to 0+} \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$$

3) $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1-\cos(x)^2}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}\right) =$$

une fonction paire

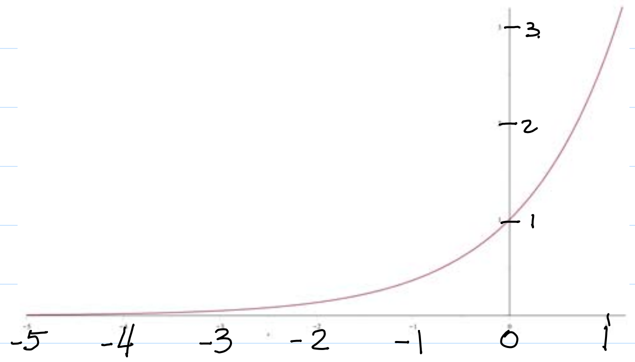
lois algébriques

$$= \lim_{x\to 0+}\left(\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos(x)}\right) = \left(\lim_{x\to 0+}\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{1+\lim_{x\to 0+}\cos(x)}$$

$$= 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

## 6.4.3. Fonction exponentielle (changement de variables)

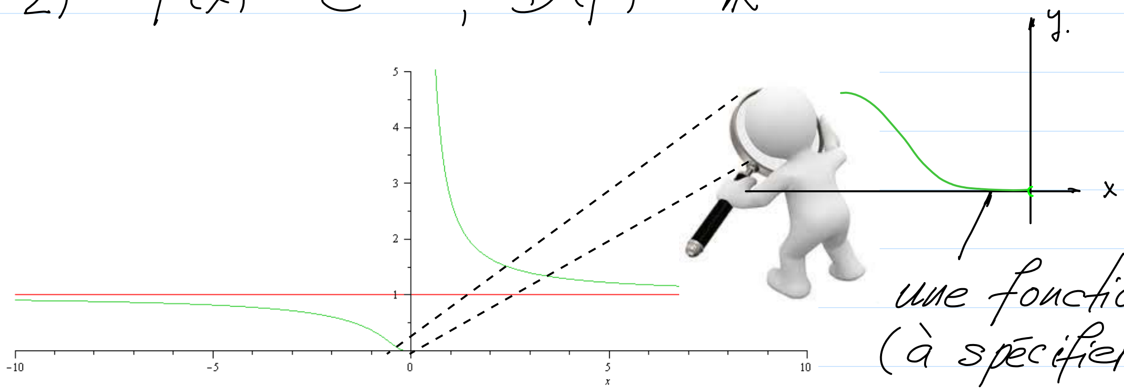
1)




$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

2) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $D(f) = \mathbb{R}^*$




une fonction "très plate"
(à spécifier plus loin).

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{y \to +\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to +\infty} e^{\frac{1}{\frac{1}{y}}} = \lim_{y \to +\infty} e^{y} = +\infty.$$

par définition on teste les mêmes suites, c.-à-d. si $(x_n)$ est telle que $x_n > 0$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ alors la suite $(y_n)$, $y_n = \frac{1}{x_n}$ satisfait $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$, et vice versa.

<u>de même:</u>

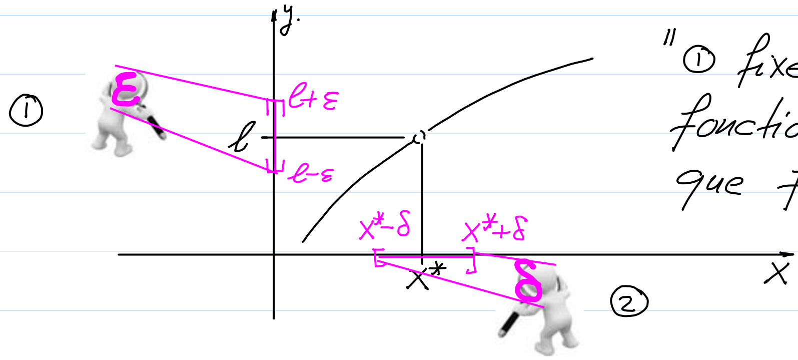
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{y \to -\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y \to -\infty} e^{y} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{y \to 0+} e^{y} = 1 \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{y \to 0-} e^{y} = 1 \end{aligned}\right\}$$

voir plus loin, une conséquence de la continuité de $e^y$ en $y=0$.

## 6.5. Définition de la limite épointée avec $\varepsilon$ et $\delta$

(Définition équivalente à la définition avec les suites)




"① fixe $\varepsilon$. ② ajuste $\delta$ (en fonction du choix de $\varepsilon$) de sorte que $f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ <u>pour tout $x$</u> $\in [x^*-\delta, x^*+\delta]$"

**Définition:** on dit qu'une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x$ tend vers $x^*$, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in D$,

$$(0 < |x - x^*| \leq \delta) \Rightarrow (|f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

$$(A \Rightarrow B)$$

limite épointée $x \neq x^*$

**Remarque:** comme toujours, $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, et on suppose qu'il existe une suite $(x_n)$, $x_n \in D$, $x_n \neq x^*$, telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

**Exemple:** $f(x) = 2x$, $x^* := 0$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 =: \ell$.

**A montrer:** $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que $|f(x) - \ell| = |2x| \leq \varepsilon$ si $|x - x^*| = |x| \leq \delta$.

C'est le cas pour le choix $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ (par exemple) car.

$$|2x| = 2|x| \leq 2 \cdot \delta = 2\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon\right) = \varepsilon$$

$$2\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$