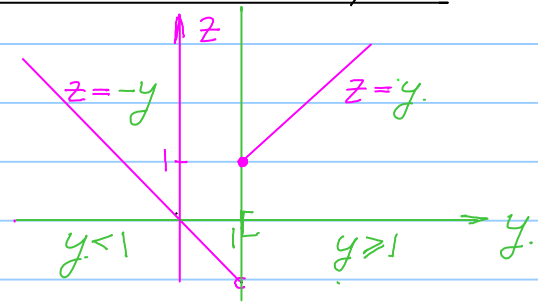
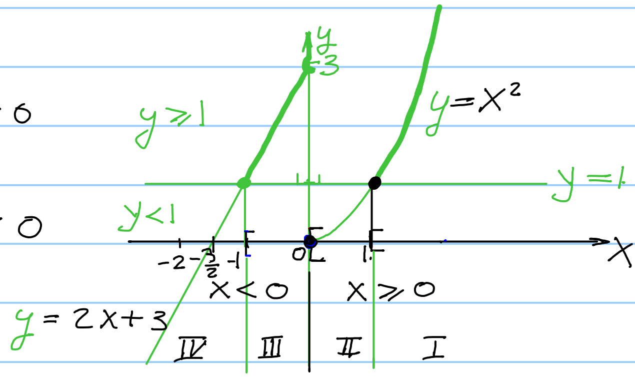
5.6 Fonctions définies par étapes

Composition de fonctions définies par étapes (un exemple)

$$z = f(y) = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 1 \\ -y & \text{si } y < 1 \end{cases}$$



$$y = g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 2x+3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

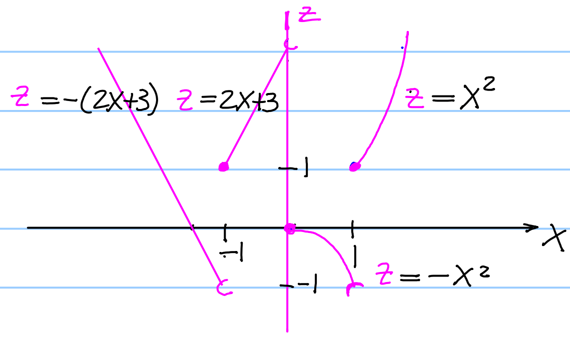


$$z = h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

I : $x \geq 0$ et $g(x) \geq 1$, II : $x \geq 0$ et $g(x) < 1$

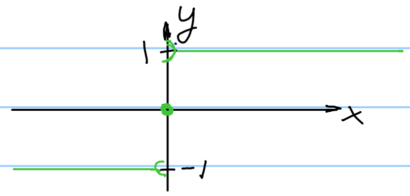
III : $x < 0$ et $g(x) \geq 1$, IV : $x < 0$ et $g(x) < 1$.

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ -x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2x+3 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -(2x+3) & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

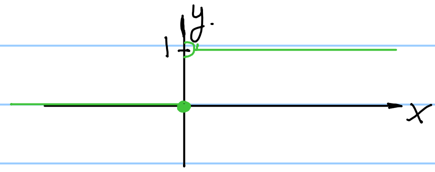


Les fonctions signum et Heaviside

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

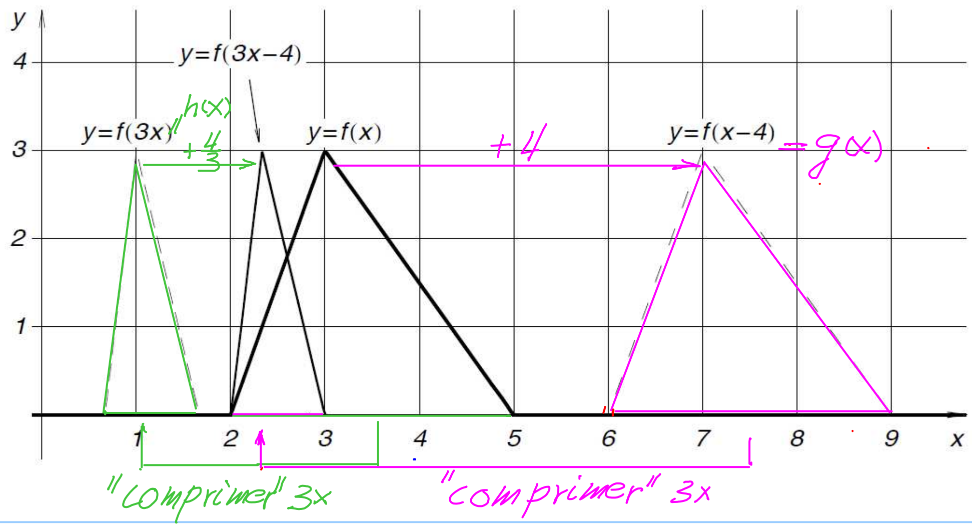


$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$



5.7. Transformations affines

But: donnés $a, b \in \mathbb{R}$ et le graphe d'une fonction $f(x)$, trouver le graphe de la fonction $f(ax+b)$.



$$f(3x-4) = f((3x)-4) = g(3x) \qquad \text{où } g(x) := f(x-4)$$

$$= f\left(3\left(x-\tfrac{4}{3}\right)\right) = h\left(x-\tfrac{4}{3}\right) \qquad \text{où } h(x) := f(3x)$$

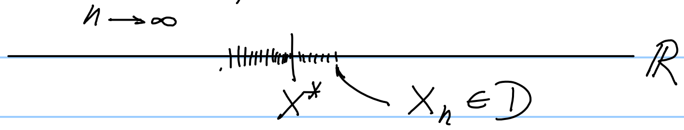
5.8. Limite d'une fonction en un point

5.8.1. Motivation

$\boxed{\text{Dans ce chapitre } f: D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}; D \neq \emptyset}$

Soit (x_n) une suite telle que $x_n \in D$ pour tout n et supposons que (x_n) converge :

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x^* \in \mathbb{R}$$



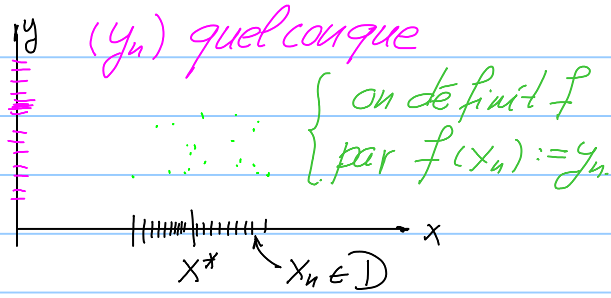
<u>Remarque:</u> x^* n'est pas forcément dans D

<u>Exemple d'une telle situation:</u> $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$, $D = \mathbb{R}^*$

(x_n), $x_n = \frac{1}{n} \in D$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0 \notin D$

<u>Question:</u> que peut-on dire de la suite (y_n), où $y_n = f(x_n)$ pour une fonction f quelconque ?

<u>Réponse:</u> rien du tout !



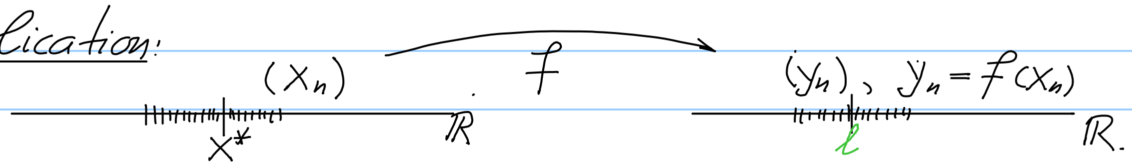
<u>Explication:</u> donné une suite (x_n) telle que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ et (y_n) une suite quelconque on peut toujours définir une fonction f par $f(x_n) := y_n$.

On s'intéresse aux fonctions pour lesquelles on peut dire des choses

5.8.2. Définition de la limite (épointée)

Définition ("limite épointée" ou simplement "limite")
On dit qu'une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ admet pour limite épointée $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^*, si pour toute suite (x_n), $x_n \in D \setminus \{x^*\}$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, la suite (y_n), $y_n = f(x_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell$

Explication:



il faut contrôler toutes les suites (x_n) telles que $x_n \in D \setminus \{x^*\}$ et telles que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

le même nombre ℓ pour toutes les suites (x_n) admises

Notation: si f admet pour limite épointée $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x^* on écrit

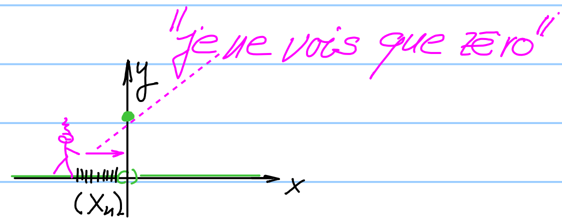
$$\lim_{\substack{x \to x^* \\ x \neq x^*}} f(x) = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to x^*} f(x) = \ell.$$

Remarque importante (si $x^* \in D(f)$)
La limite (la valeur de ℓ) peut être différente de $f(x^*)$, car on ne regarde jamais la valeur de f en x^* dans le calcul de la limite ℓ.

5.9 Exemples

5.9.1. Existence de la limite

1) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$



Soit $x^* = 0$ (à titre d'exemple).

<u>Proposition:</u> $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0$

<u>Démonstration:</u> soit (x_n) une suite arbitraire telle que $x_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Alors $y_n = f(x_n) = 0$ pour tout n (car $x_n \neq 0$) et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$.

<u>Attention:</u> $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0 \neq \underbrace{f(0) = 1}$

la valeur de f en zéro est sans intérêt pour le calcul de la limite lorsque x tend vers zéro

2) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $p(x) = x^2 + 2x + 1$, $q(x) = x + 1$.

$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Soit $x^* = -1$ (à titre d'exemple). Alors

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} \frac{(x+1)^2}{(x+1)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ x\neq -1}} (x+1) = \lim_{n\to\infty} (x_n+1) =$$

définition de la limite $=$ il faut contrôler toutes les suites (x_n) telles que $x_n \neq -1$ et $\lim_{n\to\infty} x_n = -1$

$$= \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)}_{=-1 \text{ par définition de } (x_n)\,!} + 1 = -1+1 = 0$$

5.9.2. Non existence de la limite

3) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $D = \mathbb{R}^*$.

Soit $x^* = 0$ (à titre d'exemple).

Proposition: f n'admet pas de limite en $x^* = 0$

Démonstration: (deux techniques équivalentes)

i) une suite (x_n) telle que (y_n) diverge

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi}, \; n\in\mathbb{N}, \quad x_n \neq 0 \text{ et } \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$y_n = f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+n\cdot\pi\right) = (-1)^n \quad \text{cette suite diverge}$$

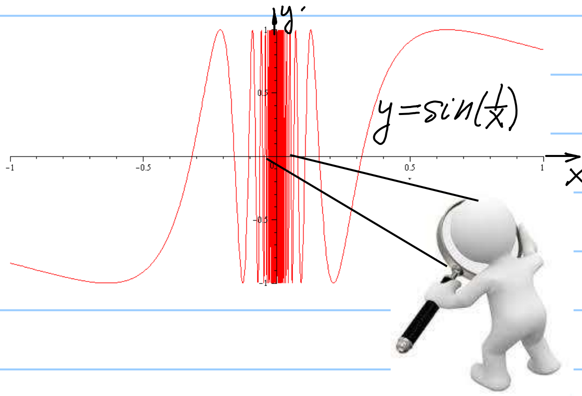
ii) deux suites $(x_n), (\tilde{x}_n)$ telles que (y_n) et $(\tilde{y}_n)$ convergent mais vers différentes limites

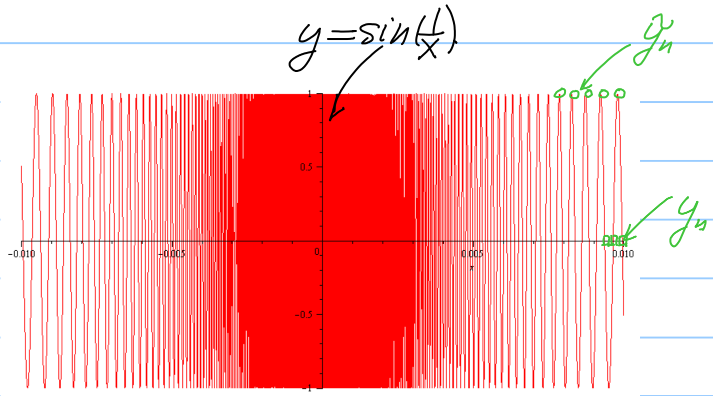
$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \; n\in\mathbb{N}^* \; ; \; \tilde{x}_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi}, \; n\in\mathbb{N}$$

on a $x_n \neq 0$, $\tilde{x}_n \neq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = 0$

$y_n = f(x_n) = \sin(\pi n) = 0$, $\tilde{y}_n = f(\tilde{x}_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ mais $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{y}_n = 1$.





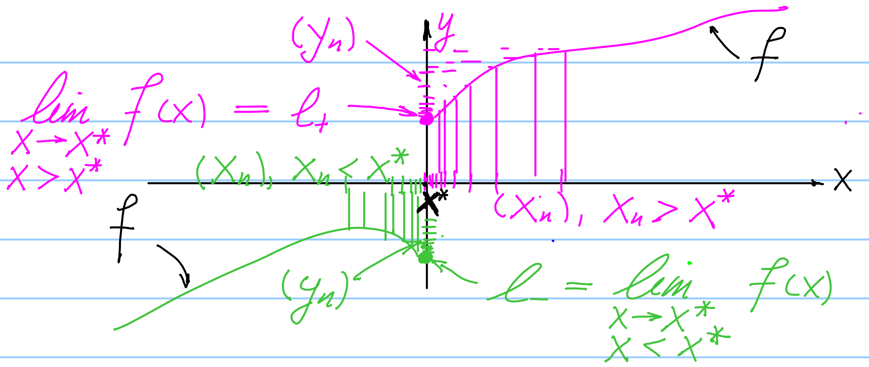
5.10. Limite épointée à droite et à gauche

Définition: on dit qu'une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ admet pour limite épointée à droite (à gauche) $\ell_+ \in \mathbb{R}$ ($\ell_- \in \mathbb{R}$) lorsque x tend vers x^*, si pour toute suite (x_n), $x_n \in D$ telle que $x_n > x^*$ ($x_n < x^*$) et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, la suite (y_n), $y_n = f(x_n)$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell_+$ ($\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \ell_-$).

Notations:

$$\lim_{x\to x^*_+} f(x) \equiv \lim_{\substack{x\to x^* \\ x > x^*}} f(x) = \ell_+ \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to x^*_-} f(x) \equiv \lim_{\substack{x\to x^* \\ x < x^*}} f(x) = \ell_- \in \mathbb{R}$$



par contre la limite $\lim_{\substack{x\to x^* \\ x\neq x^*}} f(x)$ n'existe pas.

Remarque: $\lim_{\substack{x\to x^* \\ x>x^*}} f(x) = \ell_+ = \ell = \ell_- = \lim_{\substack{x\to x^* \\ x<x^*}} f(x)$

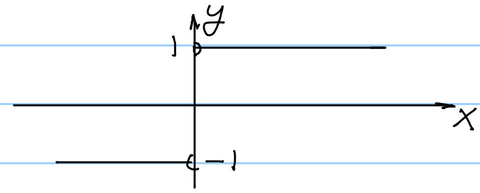
$$\iff$$

$$\lim_{\substack{x\to x^* \\ x\neq x^*}} f(x) = \ell$$

Démonstration: "$\Leftarrow$" immédiat, "$\Rightarrow$" utilise tous les ingrédients

Montrer les détails !

Exemple: $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $D(f) = \mathbb{R}^*$



$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} (-1) = -1$$

Démonstration détaillée

"$\Leftarrow$" $\lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x\neq x^*}} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x> x^*}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x< x^*}} f(x) = \ell$

① ici on contrôle toutes les suites (x_n), $x_n \in D$, $x_n \neq x^*$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

les suites contrôlées ici ont déjà été controlées dans ①

"$\Rightarrow$" donnée une suite (x_n), $x_n \in D$, $x_n \neq x^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ il y a trois cas de figure:

i) $\exists n_1$ t.q. $\forall n \geq n_1$, $x_n > x^*$ et alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ car $\lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x> x^*}} f(x) = \ell$

ii) $\exists n_2$ t.q. $\forall n \geq n_2$, $x_n < x^*$ et alors $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$ car $\lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x< x^*}} f(x) = \ell$

iii) on peut extraire de (x_n) la suite (x_k^+), x_k^+ x_{n_k} de tous les $x_{n_k} > x^*$ et la suite (x_k^-), $x_k^- = x_{m_k}$ de tous les $x_{m_k} < x^*$ et $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^+ = \lim\limits_{k\to\infty} x_k^- = x^*$. Puisque par hypothèse

$\lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x> x^*}} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{\substack{x\to x^* \\ x< x^*}} f(x) = \ell$ on peut $\forall \varepsilon > 0$ trouver des entiers k_0^+ et k_0^- tels que $\forall k \geq k_0^+$, $|f(x_k^+) - \ell| \leq \varepsilon$ et $\forall k \geq k_0^-$, $|f(x_k^-) - \ell| \leq \varepsilon$, et donc $\forall n \geq n_0 = \max\{n_{k_0^+}, m_{k_0^-}\}$ $|f(x_n) - \ell| \leq \varepsilon$.