Chapitre 5

Limite d'une fonction

5.1. Terminologie, conventions

Nous considérons des fonctions $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto y = f(x)$, où $D \equiv D(f) \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$, est le domaine de définition de la fonction f.

Convention:
En pratique une fonction est souvent donnée par une expression (une formule). Alors il est entendu que D soit le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel l'expression est définie.

Exemples

$$f(x) = \sin(x) \longleftrightarrow f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto y = \sin(x), \quad D \equiv D(f) = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{2}{1-x^2} \longleftrightarrow f : D \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto y = \frac{2}{1-x^2}, \quad D \equiv D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

Fonctions polynômes

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

pour $n \in \mathbb{N}$ donné et $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, .., n$ donnés.
$D(f) = \mathbb{R}$.

Fonctions rationnelles

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

p, q des fonctions polynômes

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\}$.

Fonctions algébriques

Fonctions construites à partir de fonctions polynômes et un nombre fini d'opérations $+, -, \cdot, /, \sqrt[n]{}$.

Fonctions transcendentes

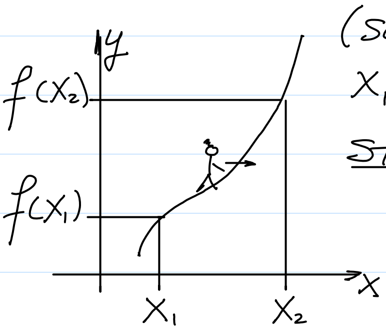
Toutes les fonctions qui ne sont pas algébriques.

Exemples: e^x, $\ln(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$

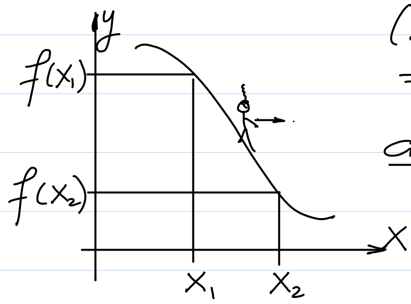
5.2. Définitions

Dans tout ce qui suit $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$

croissante: une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est croissante (sur D) si pour tout $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Elle est **strictement croissante** si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



décroissante: une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est décroissante (sur D) si pour tout $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Elle est **strictement décroissante** si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



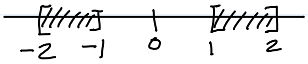
(strictement) monotone: une fonction $f : D \to \mathbb{R}$, est (strictement) monotone, si elle est soit (strictement) croissante, soit (strictement) décroissante.

Critère: une fonction strictement monotone est injective

Démonstration pour tous les $x_1, x_2 \in D$, $x_1 < x_2$ on a $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_1) > f(x_2)$ et donc $f(x_1) \neq f(x_2)$

Définition: un ensemble $X \subset \mathbb{R}$ est symétrique (par rapport à zéro) si pour tout $x \in X$ on a que $-x \in X$.

Exemples: $[-1,2]$ ou $[-2,1]$ ne sont pas symétriques
$[-3,3]$ et $[-2,-1] \cup [1,2]$ sont symétriques



paire: une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ est paire, si D est symétrique et si pour tout $x \in D$, $f(x) = f(-x)$

Exemples: $f(x) = 0,\ 1,\ x^2,\ \cos(x),\ \dfrac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sin^2(x)$

Notation: $\sin^2(x) \equiv (\sin(x))^2 \equiv (\sin x)^2 \equiv \sin^2 x \ (\equiv \sin(x)^2)$

impaire: une fonction $f: D \to \mathbb{R}$ est impaire, si D est symétrique et si pour tout $x \in D$
$f(x) = -f(-x)$.

Exemples: $f(x) = 0,\ x,\ x^3,\ \sin(x),\ \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \ldots$

périodique: une fonctions $f: D \to \mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$ ($\equiv$ T-périodique), si

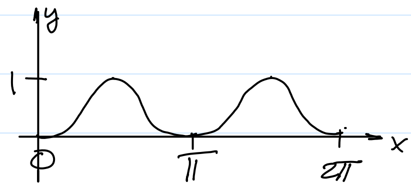
$$\forall x \in D,\ f(x+T) = f(x), \qquad (*)$$

Remarque: $(*)$ implique en particulier que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x + nT \in D$ si $x \in D$.

T est aussi appelé une période de f.

Le plus petit $T>0$ (s'il existe) tel que (*) est satisfaite est appelé la période de f.

Exemple: $f(x) = \sin^2(x)$
f est 2π-périodique
la période de f est π



5.3. Les fonctions $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$

Remarque: Soit $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ avec D symétrique. Alors $f = f_+ + f_-$, avec f_+ paire et f_- impaire. Explicitement:

$$f_+(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \quad \text{(partie paire de } f\text{)}$$

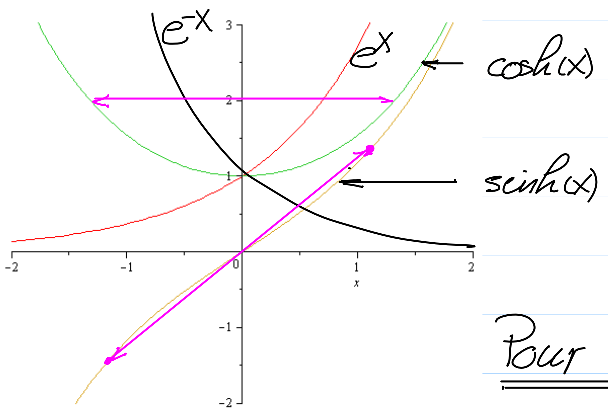
$$f_-(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \quad \text{(partie impaire de } f\text{)}$$

Exemple: $f(x) = e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$ sur $D = \mathbb{R}$

$$\cosh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \text{(partie paire de } e^x\text{)}$$

$$\sinh(x) := \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \text{(partie impaire de } e^x\text{)}$$

On a, $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1}$



$$\tanh(x) := \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

$$\coth(x) := \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{1}{\tanh(x)}$$

Pour les fonctions réciproques voir série 5

5.4. Opérations algébriques

Fonctions avec parité

Soient p, p_1, p_2 des fonctions paires et i, i_1, i_2 des fonctions impaires définies sur un domaine symétrique D et soit $f: D(f) \to \mathbb{R}$. Alors

$$\boxed{\begin{array}{lll} \left.\begin{array}{ll} p_1 + p_2 & \text{est paire} \\ p_1 \cdot p_2 & \text{est paire} \\ i_1 + i_2 & \text{est impaire} \\ i_1 \cdot i_2 & \text{est paire} \\ p \cdot i & \text{est impaire} \end{array}\right\} & \text{sur } D & (*) \\ \\ \left.\begin{array}{ll} i_1 \circ i_2 & \text{est impaire} \\ f \circ p & \text{est paire} \\ p \circ i & \text{est paire} \end{array}\right\} & \begin{array}{l}\text{là où la} \\ \text{composition} \\ \text{est défini\'e}\end{array} & (**) \end{array}}$$

Vérification de (*) et (**) (vérifier les autres cas !)

$$(*) \quad (i_1 \cdot i_2)(-x) = i_1(-x)\, i_2(-x) = \big(-i_1(x)\big)\cdot\big(-i_2(x)\big)$$
$$= i_1(x) \cdot i_2(x) = (i_1 \cdot i_2)(x)$$

$$(**) \quad (i_1 \circ i_2)(-x) = i_1\big(i_2(-x)\big) = i_1\big(-i_2(x)\big) = -i_1\big(i_2(x)\big)$$
$$= -(i_1 \circ i_2)(x)$$

Exemples

fonctions paires : $\cos(x) + x^2$, $\sin(x^2)$, $\cos(\sin(x))$, $\exp(\cosh(x))$

fonctions impaires : $\sin(x) + x$, $\sin(x^3)$, $\sin(\sinh(x))$

Fonctions périodiques

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions périodiques de période T_f et T_g, respectivement ($T_f, T_g > 0$) et soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors :

$$\left.\begin{array}{l} f+g \\ f \cdot g \end{array}\right\} \text{ sont } T\text{-périodiques} \Leftarrow \frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q} \quad (\text{voir } (*))$$

$h \circ f$ est T_f-périodique

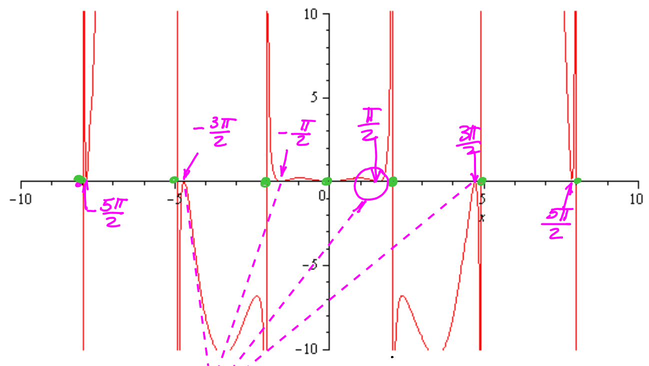
<u>A propos $(*)$</u>: $\frac{T_f}{T_g} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{T_f}{T_g} = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$.

alors $T = p \cdot T_g = q \cdot T_f$.

<u>Attention</u>: même si T_f est <u>la</u> période de f est si T_g est <u>la</u> période de g, T n'est typiquement pas la période de $f+g$ ou $f \cdot g$, et T_f n'est typiquement pas la période de $h \circ f$.

5.5. Exemples

1)

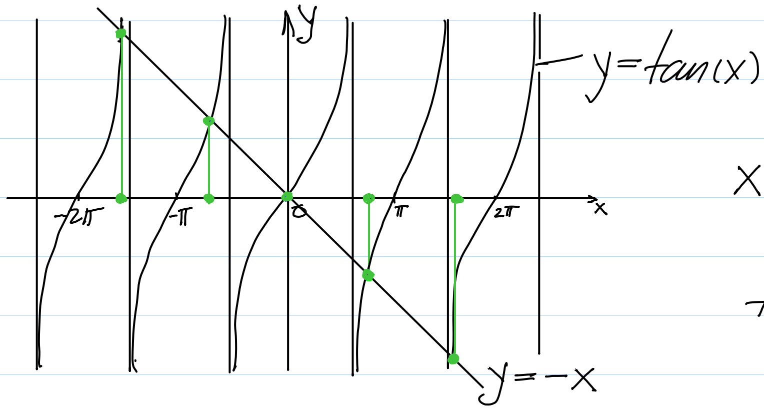


$$f(x) = \frac{x^3 \cdot \cos(x)}{x + \tan(x)}$$

- une fonction paire
- pas une fonction périodique.

$x = \pm\frac{\pi}{2}, \ldots$ à discuter car pas dans $D(f)$, $\bullet$: $x + \tan(x) = 0$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x + \tan(x)}_{\bullet\, = 0} \neq 0 \text{ et } x \neq \underbrace{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}}_{\tan \text{ pas défini}} \}$$



$$x+\tan(x)=0 \iff \tan(x)=-x$$

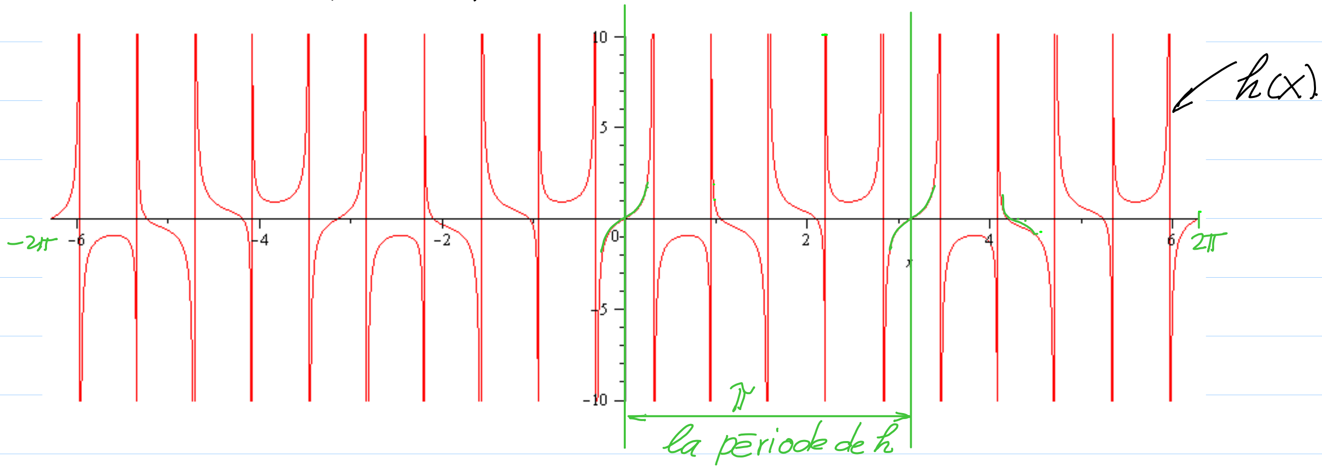
2) $h(x)=\dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)} =: \underbrace{f(x)}_{=\frac{1}{\cos(5x)}} \cdot \underbrace{g(x)}_{=\sin(3x)}$, $D(h)=\{x\in\mathbb{R} : \cos(5x)\neq 0\}$

la période de $\sin(3x)$ est $\frac{2\pi}{3} \equiv T_g$.

la période de $\dfrac{1}{\cos(5x)}$ est $\frac{2\pi}{5} \equiv T_f$.

on a $\dfrac{T_f}{T_g} = \dfrac{\frac{2\pi}{5}}{\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{3}{5} \in \mathbb{Q}$

$\Longrightarrow$ h est périodique de période $T=\frac{2\pi}{5}\cdot 5 = \frac{2\pi}{3}\cdot 3 = 2\pi$.



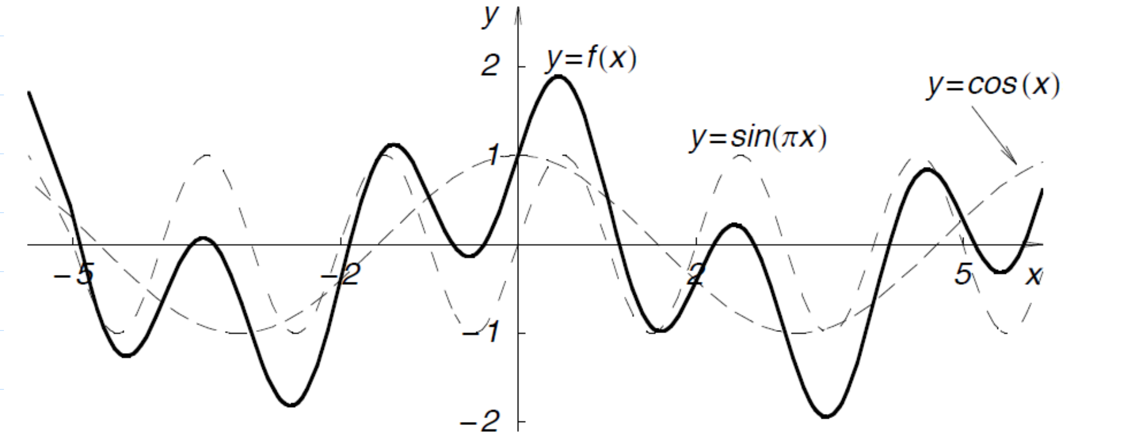
- la fonction h est impaire
- la fonction h est 2π-périodique ($n\pi$-périodique, $n\in\mathbb{N}^*$)
- la période de h est π. (par inspection du graphe)

3) $f(x) = \sin(\pi \cdot x) + \cos(x)$, $D(f) = \mathbb{R}$

$\sin(\pi \cdot x)$: la période est 2.

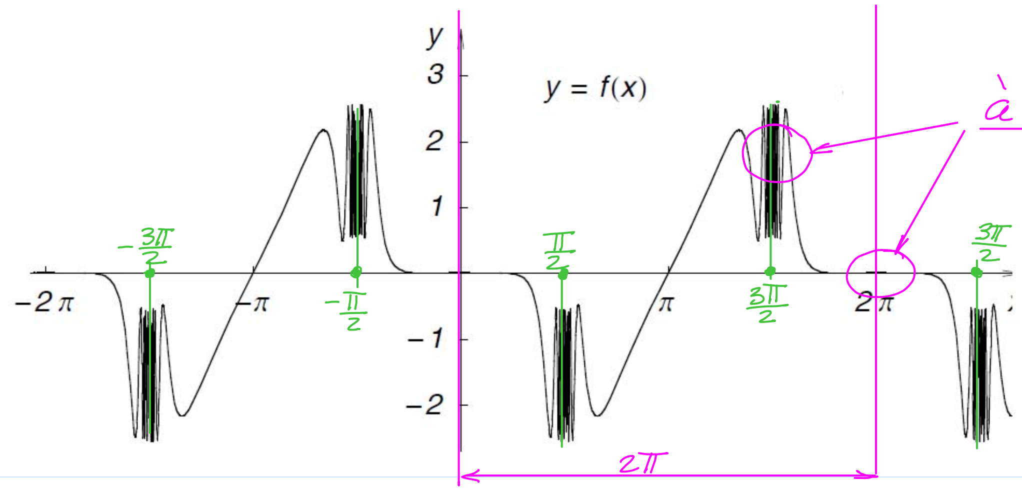
$\cos(x)$: la période est 2π

- la fonction n'est pas périodique $\left(\frac{2}{2\pi} \notin \mathbb{Q} \right)$
- f n'a pas de parité



4) $f(x) = \underbrace{\sin(\tan(x))}_{\substack{\text{définie sur } D(\tan) \\ \text{la période est } \pi}} - \underbrace{\tan(\sin(x))}_{\substack{\text{définie sur } \mathbb{R} \\ \text{la période est } 2\pi}}$

- $D(f) = D(\tan) \cap \mathbb{R} = D(\tan)$
- f est impaire et 2π-périodique $\left(\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \right)$



à discuter

· $\notin D(f)$

la période de f est 2π