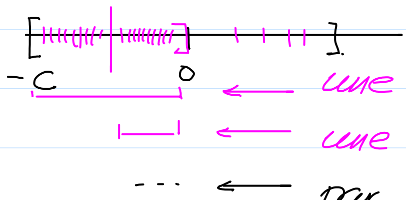
Théorème (B.W.) de toute suite (a_n) <u>bornée</u> on peut extraire une sous-suite convergente

Un argument:



← une moitié avec une ∞-ité de a_n

← une moitié avec une ∞-ité de a_n

← par récurrence on localise un "a" possible.

Définition: $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation d'une suite (a_n) s'il existe une sous-suite (d_k) telle que $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = a$.

Le théorème de B.W. dit que toute suite bornée possède au moins un point d'accumulation.

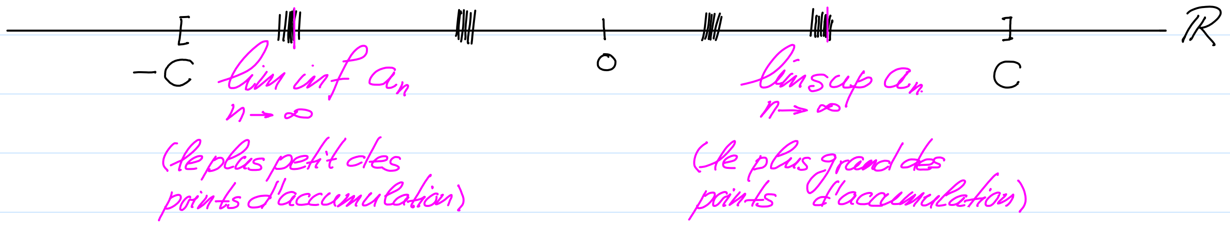
Exemple 1: $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. ± 1 des points d'accumulation

$d_k = a_{2k}$ converge vers $+1$

$d_k = a_{2k+1}$ converge vers -1.

4.5. Limite inférieure et limite supérieure

Définition: soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée (c.-à-d. $\exists\, C>0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq C$).



Construction de $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$:

$A_0 := \{a_0, a_1, \dots\}$ $\qquad b_0 := \inf A_0 \leq \sup A_0 =: c_0$

$A_1 := \{a_1, a_2, \dots\}$ $\quad b_0 \leq b_1 := \inf A_1 \leq \sup A_1 =: c_1 \leq c_0$

b_0 est un minorant pour $A_1 \subset A_0$, mais pas forcément le plus grand minorant.

$\vdots$

$A_n := \{a_n, \dots\}$ $\quad b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n := \inf A_n \leq \sup A_n =: c_n \leq \dots \leq c_1 \leq c_0$

(b_n) est une suite croissante et majorée $\Rightarrow$ convergence
(c_n) est une suite décroissante et minorée $\Rightarrow$ convergence

$$\boxed{\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} b_n} = b \leq c = \boxed{\lim_{n\to\infty} c_n =: \limsup_{n\to\infty} a_n}$$

Voir le "bon à savoir"

Remarque: les b_n et c_n ne sont pas forcément des éléments de $A_0 = \{a_0, a_1, \dots\}$

Remarque: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a.$

4.6. Démonstration de B. W. (facultatif)

4.7. Séries numériques

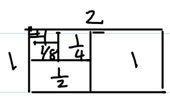
On aimerait définir des "sommes infinies" $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, pour (a_k) une suite de nombres réels donnée.
Une telle somme est appelée une série (numérique)

Définition: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} S_n$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Donc
$$S_0 = a_0 \qquad\qquad \Leftrightarrow a_0 = S_0$$
$$S_1 = a_0 + a_1 = S_0 + a_1 \qquad\qquad \Leftrightarrow a_1 = S_1 - S_0$$
$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = S_1 + a_2 \qquad\qquad \Leftrightarrow a_2 = S_2 - S_1$$

Terminologie:
- les a_k sont appelés les termes de la série (numérique)
- la somme finie S_n est appelée la n-ème somme partielle de la série (numérique)

Exemple: $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2$



$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Définition: une série numérique est dite convergente, si la suite (S_n) des sommes partielles converge. La limite $s = \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$ est appelée la somme de la série (numérique)

Définition: une série qui n'est pas convergente est appelée divergente

Définition: une série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est dite <u>absolument convergente</u>, si la série $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge.

Remarques

- toute série absolument convergente est convergente (le démontrer, utiliser le critère de Cauchy)
- la somme d'une série absolument convergente <u>ne dépend pas de la numérotation de ses termes</u> (sans démonstration)

4.8. Exemples

i) La série harmonique

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{cette série diverge}}$$

$S_1 = 1$, $S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, ...

Proposition $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ (la suite (S_n) est croissante mais pas majorée)

Démonstration:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad b_n := \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = S_{2n}$$

(c'est une sous-suite de S_n)

Supposons que $\underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}}_{\text{Hypothèse, } (S_n) \text{ converge}} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = S$

par définition de la limite !

Alors

$$b_n - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \underbrace{\frac{1}{k}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

et donc

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n\to\infty} (b_n - s_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0$$

$\times$.

ii) <u>La série harmonique alternée</u>

$$\boxed{s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}} \quad = \ln(2) \qquad \left((-1)^0 := 1 \right)$$

- la série converge, mais pas absolument (voir 4.8, i))
- la série converge par le critère de Leibniz (voir 4.9, ii))

iii) <u>La série géométrique</u>

$$\boxed{s = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{où } q \in \mathbb{R} \text{ est donné}}$$

- la série converge absolument pour $0 \leq |q| < 1$
- la série diverge pour $|q| \geq 1$.

<u>Démonstration:</u>

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

et donc $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$ et la suite (s_n) diverge si $|q| \geq 1$.

4.9. Critères de convergence

i) Critère nécessaire pour la convergence

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0}$$

Démonstration: si la série est convergente la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est une suite de Cauchy. Ceci veut dire que $\forall \varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que $\forall n, m \geq n_0$, $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$. En particulier $|S_{m+1} - S_m| \leq \varepsilon$ et donc $|a_{m+1}| \leq \varepsilon$. On a donc que $\forall \varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0 + 1$ $|a_n - \underset{\text{zéro}}{0}| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) Séries alternées : critère de Leibniz (sans démonstration)

Si (a_k) est une suite alternée (c'est-à-dire, $\forall k, (-1)^k a_k \geq 0$ ou $(-1)^k a_k \leq 0$), si $(|a_k|)$ est une suite strictement décroissante (c'est-à-dire, $\forall k$, $|a_{k+1}| < |a_k|$), et si $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Exemple: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$, $|a_k| = \frac{1}{k}$

iii) Critères de comparaison

- Si, $\forall k$ $0 \leq |a_k| \leq b_k$ et si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolument.

- Si, $\forall k$ $0 \leq b_k \leq a_k$ et si $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

iv) Critères de d'Alembert et de Cauchy

Théorème: (démonstration voir les exercices)

Soit $s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Alors

si $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q \in \mathbb{R}$ d'Alembert

ou si $\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = q \in \mathbb{R}$ Cauchy

ou si $\limsup_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = q \in \mathbb{R}$ critère du limsup

Alors, si $0 \leq q < 1$ la série converge absolument

si $q > 1$ la série diverge

si $q = 1$ pas de conclusion avec ces méthodes

Remarque: les critères donnent la même valeur de q (ou pas de valeur).

Exemples

i) $s = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{3k-4}{4k+5}\right)^k}_{=a_k}$ converge par Cauchy

car:

$$\lim_{k\to\infty} \left(|a_k|^{\frac{1}{k}}\right) = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{3k-4}{4k+5}\right| = \frac{3}{4} =: q < 1.$$

ii) $s = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + (-1)^k \frac{1}{4}\right)^k$ converge par le critère du limsup

$$\limsup_{k\to\infty} \left(|a_k|^{\frac{1}{k}}\right) = \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{1}{2} + (-1)^k \frac{1}{4}\right| = \frac{3}{4} =: q < 1.$$

4.10. Séries avec un paramètre (exemples)

1) $S = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k^2}{b^k}}_{=a_k}$, $b \in \mathbb{R}^*$ un paramètre

La convergence dépend de la valeur de b

Par d'Alembert:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(k+1)^2}{b^{k+1}}}{\frac{k^2}{b^k}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)^2}{b \cdot k^2} \right| = \frac{1}{|b|} =: q$$

i) la série converge absolument pour $|b| > 1$ $(\Leftrightarrow q < 1)$

ii) la série diverge pour $0 < |b| < 1$ $(\Leftrightarrow q > 1)$

iii) pour $b = \pm 1$ on a $\sum_{k=1}^{\infty} k^2$ et $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2$,

ces séries divergent par le critère 4.9, i) ∇

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k!} x^k}_{=: a_k}$, $x \in \mathbb{R}$ un paramètre , $0! := 1$, $x^0 := 1$

Pour $x = 0$ la somme vaut 1, et pour $x \neq 0$ on a avec d'Alembert:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(k+1)!} x^{k+1}}{\frac{1}{k!} x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x}{k+1} \right| = 0 =: q < 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série converge donc absolument

En fait: $$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = e^x}$$ (voir plus tard)

En particulier $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e = 2.718281828\ldots = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$