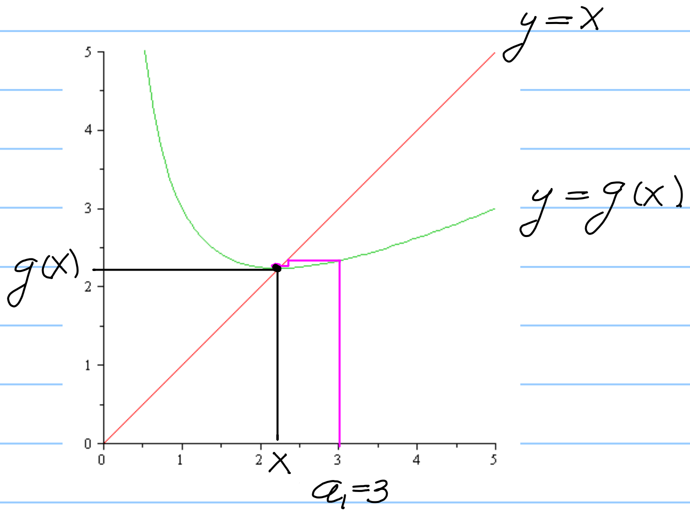
3.10 Convergence d'une suite définie par récurrence

Exemple: $a_1 = 3$, $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$

$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\frac{1}{x}$

c'est-à-dire: $\boxed{a_n = g(a_{n-1}) = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{5}{2}\frac{1}{a_{n-1}}}$, $n = 2, 3, \ldots$



Montrons que la suite est minorée et décroissante $\Rightarrow$ convergence

0) $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (la suite est bien définie, $a_n \in D(g)$)

par récurrence: i) $a_1 = 3 > 0$

ii) $a_n > 0$ si $a_{n-1} > 0$, $n = 2, 3, \ldots$

i) on calcule la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$ sous l'hypothèse que la suite est convergente.

lois algébriques

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} a_{n-1} + \frac{5}{2}\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}} = \frac{1}{2}a + \frac{5}{2}\frac{1}{a} \qquad (*)$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, t.q.

$\forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \varepsilon \implies \forall n \geq n_0 + 1, |a_{n-1} - a| \leq \varepsilon$

$(*) \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} a + \frac{5}{2} \frac{1}{a}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} a^2 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{5}$ (car $a_n > 0$ par o)).

ii) <u>la suite est minorée par $\sqrt{5}$</u>

<u>par récurrence:</u> $\quad a_n \geq \sqrt{5}$: $P(n)$.

i) $a_1 = 3 > \sqrt{5}$ (car $9 \geq 5$)

ii) $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{a_{n-1}}$

$$= \frac{1}{2 \cdot a_{n-1}} \left(a_{n-1}^2 + 5 \right)$$

c'est ici que l'on utilise (en principe) $P(n-1)$: $a_{n-1} \geq \sqrt{5}$.

$$= \frac{1}{2 a_{n-1}} \left(a_{n-1} - \sqrt{5} \right)^2 + \sqrt{5} \geq \sqrt{5}$$

iii) <u>la suite est décroissante</u>

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{a_{n-1}} - a_{n-1}$$

$$= -\frac{1}{2} a_{n-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{-a_{n-1}^2 + 5}{2 \cdot a_{n-1}} \leq 0$$

par ii)

ii) + iii) $\Rightarrow$ la suite converge $\overset{i)}{\Longrightarrow} \lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{5}$

<u>Remarques:</u>

- $a_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^*$
- $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, où $f(x) = x^2 - 5$ — <u>voir plus loin, $f'(x) = 2x$</u>
- $g(a) = a \iff f(a) = 0$

Méthode de Newton pour la fonction f.

- une "machine" dans $\mathbb{Q}$ pour calculer $\sqrt{5}$ (dans la limite $n \to \infty$).

3.11 Bon à savoir

i) toute suite convergente est bornée (voir 3.5)

ii) si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, alors $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$

iii) <u>règle de d'Alembert pour les suites</u>

Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = g \in \mathbb{R}$ existe, alors

$0 \leq g < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$g > 1 \Rightarrow$ la suite (a_n) diverge

$g = 1 \Rightarrow$ pas de conclusion par ce critère

iv) si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $a_n \leq b_n$ alors $a \leq b$

v) si (a_n) est une suite croissante et (b_n) une suite décroissante telles que $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, alors

1) $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_0$, $\forall n$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = a = b = \lim_{n\to\infty} b_n$

et si (a_n) et (b_n) sont des suites quelconques telles que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, on a ou bien 2) ou les deux suites divergent.

facultatif

Chapitre 4

Suites de nombres réels, II

4.1. Suites de Cauchy

Critère de convergence $\Leftrightarrow$ définition de la convergence

<u>Définition</u> une suite (a_n), $a_n \in \mathbb{R}$ est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$, $|a_n - a_m| \leq \varepsilon$. $(\varepsilon \in \mathbb{R})$

<u>Remarque</u>: il suffit de contrôler les $\varepsilon \in \mathbb{Q}$

<u>Remarque</u>: si $a_n \in \mathbb{Q}$ (et $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$) c'est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

<u>Théorème</u>: dans $\mathbb{R}$ (mais pas dans $\mathbb{Q}$!) une suite (a_n) est une suite de Cauchy, si et seulement si (a_n) est une suite convergente.

<u>Démonstration</u>

"si"

$\Leftarrow$ par définition de $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $|a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Donc $\forall n, m \geq n_0$

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

"seulement si"

$\Rightarrow$
- une suite de Cauchy est une suite bornée.
  (le montrer !)
- on utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass (voir 4.4) pour "trouver" la valeur de la limite

4.2 Construction de $\mathbb{R}$ (un modèle pour $\mathbb{R}$)

$X = \{$toutes les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}\}$.

<u>Relation d'équivalence sur X.</u> Soit $(a_n) \in X$ et $(b_n) \in X$. Alors, par définition,

$$(a_n) \sim (b_n) \quad \text{si} \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0,$$

c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geq n_0$, $|(a_n - b_n) - 0| = |a_n - b_n| \leq \varepsilon$.

<u>Définition:</u> $\mathbb{R} := X/_\sim$ avec les opérations

$+$: addition des suites: $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$

$\cdot$: multiplication des suites: $(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n)$

4.3. Suites définies par récurrences linéaires

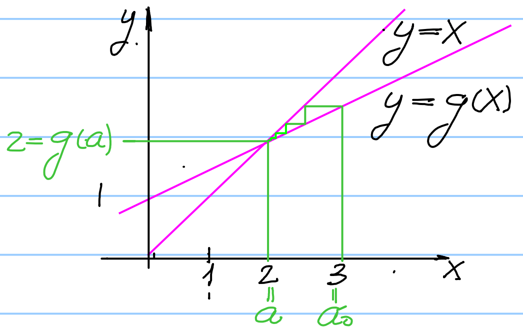
<u>Théorème:</u> soit $g(x) = q \cdot x + b$, $b, q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$, $a := \frac{b}{1-q}$, et soit la suite

$$a_0 \in \mathbb{R}, \qquad a_n = g(a_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

- si $|q| < 1$ ou si $a_0 = a$ alors $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
- si $|q| > 1$ et $a_0 \neq a$ alors la suite diverge.

<u>Remarque:</u> $a = \frac{b}{1-q} \iff a = g(a)$

Exemple: $a_0 = 3$, $a_n = g(a_{n-1}) = \underbrace{\boxed{\tfrac{1}{2}}}_{=q} a_{n-1} + \underbrace{1}_{=b}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$



$q = \boxed{\tfrac{1}{2}} \Rightarrow$ convergence pour tout a_0.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a = g(a) = 2$.

Démonstration du théorème

o) la suite est bien définie ($a_n \in \mathbb{R} = D(g)$).

i). si la suite converge vers a, alors

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} g(a_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} (q a_{n-1} + b) = qa + b = g(a)$$

ii) $n \geq 2$ $\quad |a_n - a_{n-1}| = |(q a_{n-1} + b) - (q a_{n-2} + b)| =$

$$= |q| \cdot |a_{n-1} - a_{n-2}| = \ldots = |q|^{n-1} |a_1 - a_0|$$

par récurrence

$\boxed{\Rightarrow \text{la suite diverge si } |q| > 1 \text{ et } a_0 \neq a.}$

facultatif

Montrons que pour $|q| < 1$ c'est une suite de Cauchy:

iii) soient, donné $n_0 \in \mathbb{N}$, $m \geq n_0$, $n \geq m+2$ et $|q| < 1$. Alors

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_{m+1} - a_m)|$$

$$\leq |a_n - a_{n-1}| + |a_{n-1} - a_{n-2}| + \ldots + |a_{m+1} - a_m|$$

$$= (|q|^{n-1} + |q|^{n-2} + \ldots + |q|^m) |a_1 - a_0|$$

utiliser ii)

Facultatif

$$= |q|^{m}\left(1+|q|+\dots+|q|^{n-m-1}\right)|a_1-a_0|$$

$$= |q|^{m}\cdot \underbrace{\frac{1-|q|^{n-m}}{1-|q|}}\,|a_1-a_0|$$

{voir les prérequis}

$$\leq |q|^{n_0}\,\frac{1}{1-|q|}\,|a_1-a_0| \leq \varepsilon$$

utiliser $m \geq n_0$ et $|q|<1$

si $|q|<1$, alors $\forall \varepsilon>0$ il existe n_0, tel que "$\leq$" est satisfait (ceci détermine n_0, donné ε)

$\Rightarrow$ (a_n) une suite de Cauchy

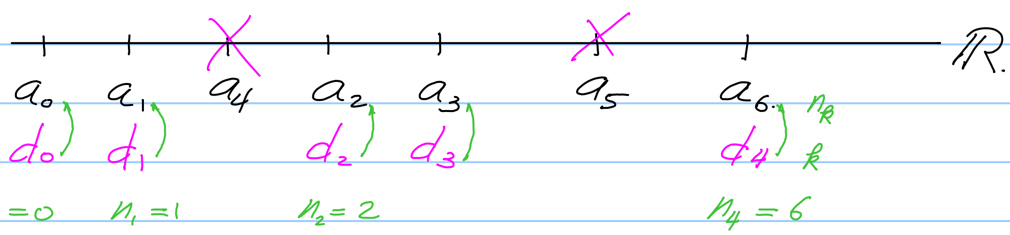
$\Rightarrow$ (a_n) une suite convergente

$\Rightarrow$ avec i) $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad (|q|<1).}$

4.4. Théorème de Bolzano-Weierstrass

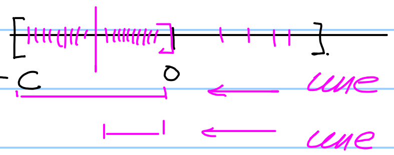
Définition: soit $(n_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels, c'est-à-dire que $n_k > n_\ell$ si $k>\ell$. Alors la suite $(d_k)_{k\geq 0}$, où $d_k = a_{n_k}$ est appelée une sous-suite de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$

Exemple:



Théorème (B.W.) de toute suite (a_n) bornée on peut extraire une sous-suite convergente

Un argument:



une moitié avec une ∞-ité de a_n

une moitié ave une ∞-ité de a_n

... par récurrence on localise un "a" possible.

Définition: $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation d'une suite (a_n) s'il existe une sous-suite (d_k) telle que $\lim_{k\to\infty} d_k = a$.

Le théorème de B.W. dit que toute suite bornée possède au moins un point d'accumulation.

Exemple 1: $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$. ± 1 des points d'accumulation

$d_k = a_{2k}$ converge vers $+1$

$d_k = a_{2k+1}$ converge vers -1.