Ens: Lénaïc Chizat
Analyse I - Section
13 janvier 2025
3h30

XXX

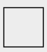
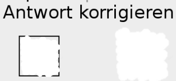
Student

SCIPER : **999999**

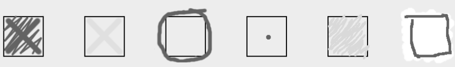
Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant·e sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren
		

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si $\lambda \in I$, où I est l'ensemble

- ☐ $]-\infty, 0[$
- ☐ $[-1, +\infty[$
- ☐ $]-\infty, -1[$
- ☐ $]-\infty, 0]$

Question 2 : Soit l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right))}.$$

Parmi les nombres complexes ci-dessous, lequel est solution de cette équation?

- ☐ $z = 2(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right))$
- ☐ $z = 2(\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right))$
- ☐ $z = \sqrt[3]{4}(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right))$
- ☐ $z = \sqrt[3]{4}(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right))$

Question 3 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction bijective définie par

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

et soit $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors $(f^{-1})'(1)$ est égal à

- ☐ $\frac{1}{3}$
- ☐ $\frac{1}{5}$
- ☐ $\frac{1}{6}$
- ☐ $\frac{1}{78}$

Question 4 : Soit $f\colon [-1, 2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x+1}(x^2 - 2x + 1)$. Alors son ensemble image, $f([-1, 2])$, est égal à

- ☐ $[0, e^3]$
- ☐ $[4, e^3]$
- ☐ $[0, 4]$
- ☐ $[0, +\infty[$

Question 5 : L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2 - 4}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ $-\frac{1}{4}\log(3)$
- ☐ $2\log(3)$
- ☐ $\frac{1}{2}\log(3)$
- ☐ $-\frac{1}{2}\log(3)$

Question 6 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \\[2ex] x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Alors, en $x = 0$, f est

- ☐ dérivable à droite mais pas à gauche
- ☐ dérivable à gauche mais pas à droite
- ☐ dérivable à gauche et à droite mais n'est pas dérivable
- ☐ dérivable

Question 7 : Soit $f\colon\,]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\log(|\log(x)|)}{\log(x)}.$$

Alors

- ☐ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
- ☐ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$

Question 8 : L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

- ☐ converge et vaut 2
- ☐ converge et vaut $\frac{1}{2}$
- ☐ diverge
- ☐ converge et vaut 1

Question 9 : La limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n(n+3)}\right)^n$$

existe et vaut

- ☐ e^{-3}
- ☐ e^{-1}
- ☐ 0
- ☐ 1

Question 10 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble défini par

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^* \ :\ \frac{1}{x} \geq 2\right\}.$$

Alors

- ☐ $\mathrm{Inf}\, A = 0$
- ☐ $\mathrm{Inf}\, A = \frac{1}{2}$
- ☐ $\mathrm{Inf}\, A = 2$
- ☐ A n'est pas minoré

Question 11 : Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ est

- ☐ $\frac{1}{4}$
- ☐ $+\infty$
- ☐ 4
- ☐ 0

Question 12 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = \sqrt{3}$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{3u_{n-1}}$. Alors

- ☐ $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{3}$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} u_n = 3$
- ☐ $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge
- ☐ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Question 13 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3} & \text{si } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{\log(x^2+1)}{3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Alors

- ☐ f est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$
- ☐ f est dérivable mais n'est pas continûment dérivable sur $\mathbb{R}$
- ☐ f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$
- ☐ f est continue mais n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$

Question 14 : Soit $f(x) = \log\left(\dfrac{3}{2} + x\right)$. Alors, le développement limité d'ordre 2 de f autour de $x_0 = 0$ est donné par

- ☐ $\log\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + x^2\varepsilon(x)$
- ☐ $\log\left(\frac{1}{2}\right) + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$
- ☐ $\log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right)x - \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$
- ☐ $\log\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

Question 15 : La série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3 - k}}$

- ☐ ne converge pas mais converge absolument
- ☐ converge mais ne converge pas absolument
- ☐ converge et converge absolument
- ☐ ne converge pas et ne converge pas absolument

Question 16 :
Soit $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et les suites $(a_k)_{k\geq 0}$, $(b_k)_{k\geq 0}$ définies par

$$a_k = f(2k) \quad \text{et} \quad b_k = f(2k+1).$$

Si

$$\lim_{k\to\infty} a_k = -1\,, \quad \text{et} \quad \lim_{k\to\infty} b_k = 1\,,$$

alors, l'équation $f(x) = 0$

- ☐ possède une infinité de solutions
- ☐ possède exactement une solution
- ☐ possède exactement deux solutions
- ☐ ne possède aucune solution

Question 17 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, et $(b_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$b_n = 1 + a_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\,, \qquad n \geq 0\,.$$

Alors

- ☐ $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = -1$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = 3$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = 3$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = 3$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = 3$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to\infty} b_n = -2$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} b_n = 2$

Question 18 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ $\dfrac{8 - 2\sqrt{2}}{3}$
- ☐ $\dfrac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$
- ☐ $4 - 2\sqrt{2}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{2} + 1}{3}$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 3$. Alors $\liminf_{n\to\infty} a_n > 3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Il existe une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et injective.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Alors

$$\frac{1}{2}f(t)^2 = \frac{1}{2}f(0)^2 + \int_0^t f(x)f'(x)\,dx \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Si la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,(x-1)^k$ converge pour $x = 0$, alors elle converge pour $x = 2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soient f et g deux fonctions possédant des développements limités d'ordre 1 autour de $x_0 = 0$, donnés par

$$f(x) = 1 + 2x + x\varepsilon(x)\,,$$
$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x)\,.$$

Alors le développement limité d'ordre 1 de $f(g(x))$ autour de $x_0 = 0$ est donné par

$$f(g(x)) = 3 + x + x\varepsilon(x)\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Les racines du polynôme $z^4 + z^3 - 2z^2 + 2z + 4$ sont $\{-2, -1, \frac{1}{4}, 1+i\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f\colon\ ]0,1[\ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une fonction continue $g\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in\ ]0,1[$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés, et $c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\operatorname{Sup}\{x + c \ : \ x \in A\} - \operatorname{Sup}\{x + c \ : \ x \in B\} = \operatorname{Sup} A - \operatorname{Sup} B.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$ une fonction dérivable. Alors la fonction $g\colon \mathbb{R} \to]0, \infty[$ définie par $g(x) = f(x)^{f(x)}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$. Si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 *Réservé au correcteur*

(a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de "la suite (a_n) converge vers ℓ".

(b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que ses sous-suites $(u_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent chacune vers un même réel $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Question 30: *Cette question est notée sur 6 points.*

0 1 2 3 4 5 6 *Réservé au correcteur*

Soit $f\colon \left]-\frac{2}{3},+\infty\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{3x+2}.$$

(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \left]-\frac{2}{3},+\infty\right[$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{3^n n!}{(3x+2)^{n+1}}.$$

(b) Ecrire la série de Taylor de f autour de $x_0 = \frac{2}{3}$.

(c) Donner le rayon de convergence de la série de Taylor de f donnée au point précédent. Justifier.

Question 31: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 *Réservé au correcteur*

(a) Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x^2 - x| + |x|$.

(b) Donner, sans justifier, un exemple de fonction définie sur $[-1,1]$ qui n'est pas bornée.