

Ens: Lénaïc Chizat
Analyse I - (n/a)
13 janvier 2025
3h30
Room : BLANK













BLANK

n/a

SCIPER: 999999

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant·e sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question [SCQ-01-inf-sup-B] : Soit $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* : \frac{1}{x} \geq 2 \right\}.$$

Alors

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $\text{Inf } A = 2$ | <input type="checkbox"/> A n'est pas minoré |
| <input type="checkbox"/> $\text{Inf } A = \frac{1}{2}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $\text{Inf } A = 0$ |

Question [SCQ-02-complexes-B] : Soit l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))}.$$

Parmi les nombres complexes ci-dessous, lequel est solution de cette équation?

- | | |
|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> $z = 2(\cos(\frac{7\pi}{9}) + i \sin(\frac{7\pi}{9}))$ | <input type="checkbox"/> $z = 2(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i \sin(\frac{7\pi}{12}))$ |
| <input type="checkbox"/> $z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{\pi}{9}) + i \sin(\frac{\pi}{9}))$ | <input type="checkbox"/> $z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{13\pi}{12}) + i \sin(\frac{13\pi}{12}))$ |

Question [SCQ-03-suites-convergence-A] : La limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n(n + 3)} \right)^n$$

existe et vaut

- | | | | |
|--|----------------------------|-----------------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> e^{-3} | <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> e^{-1} | <input type="checkbox"/> 1 |
|--|----------------------------|-----------------------------------|----------------------------|

Question [SCQ-04-suites-recurrence-B] : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = \sqrt{3}$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{3u_{n-1}}$. Alors

- | | | | |
|---|--|---|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$ | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ | <input type="checkbox"/> $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{3}$ | <input type="checkbox"/> $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge |
|---|--|---|---|

Question [SCQ-05-serie-A] : La série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3 - k}}$

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> converge mais ne converge pas absolument | <input type="checkbox"/> ne converge pas mais converge absolument |
| <input checked="" type="checkbox"/> converge et converge absolument | <input type="checkbox"/> ne converge pas et ne converge pas absolument |

Question [SCQ-06-liminf-limsup-B] : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, et $(b_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$b_n = 1 + a_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

Alors

- | | |
|---|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ | <input type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ |
| <input type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ | <input type="checkbox"/> $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ |

Question [SCQ-07-serie-parametre-B] : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si $\lambda \in I$, où I est l'ensemble

$] -\infty, 0[$

$] -\infty, 0]$

$[-1, +\infty[$

$] -\infty, -1[$

Question [SCQ-08-limit-prolongmt-B] : Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\log(|\log(x)|)}{\log(x)}.$$

Alors

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

Question [SCQ-09-val-intermed-B] :

Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et les suites $(a_k)_{k \geq 0}$, $(b_k)_{k \geq 0}$ définies par

$$a_k = f(2k) \quad \text{et} \quad b_k = f(2k + 1).$$

Si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = -1, \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1,$$

alors, l'équation $f(x) = 0$

ne possède aucune solution

possède exactement deux solutions

possède exactement une solution

possède une infinité de solutions

Question [SCQ-10-cont-vs-derivab-B] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Alors, en $x = 0$, f est

dérivable

dérivable à gauche mais pas à droite

dérivable à droite mais pas à gauche

dérivable à gauche et à droite mais n'est pas dérivable

CATALOGUE

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [TF-19-inf-sup-A] : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés, et $c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\text{Sup}\{x + c : x \in A\} - \text{Sup}\{x + c : x \in B\} = \text{Sup } A - \text{Sup } B.$$

VRAI FAUX

Question [TF-20-complexes-C] : Les racines du polynôme $z^4 + z^3 - 2z^2 + 2z + 4$ sont $\{-2, -1, \frac{1}{4}, 1 + i\}$.

VRAI FAUX

Question [TF-21-induction-suites-limites-B-hard] : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 3$. Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 3$.

VRAI FAUX

Question [TF-22-serie-B] : Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ converge.

VRAI FAUX

Question [TF-23-fonction-etc-A] : Il existe une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et injective.

VRAI FAUX

Question [TF-24-limites-continuite-A] : Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une fonction continue $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

VRAI FAUX

Question [TF-25-derivabilite-discussion-A] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ une fonction dérivable. Alors la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ définie par $g(x) = f(x)^{f(x)}$ est aussi dérivable sur \mathbb{R} .

VRAI FAUX

Question [TF-26-serie-entiere-B] : Si la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - 1)^k$ converge pour $x = 0$, alors elle converge pour $x = 2$.

VRAI FAUX

CATALOGUE

Question [TF-27-dev-limite-A] : Soient f et g deux fonctions possédant des développements limités d'ordre 1 autour de $x_0 = 0$, donnés par

$$f(x) = 1 + 2x + x\varepsilon(x),$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x).$$

Alors le développement limité d'ordre 1 de $f(g(x))$ autour de $x_0 = 0$ est donné par

$$f(g(x)) = 3 + x + x\varepsilon(x).$$

VRAI FAUX

Question [TF-28-integrale-B] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. Alors

$$\frac{1}{2}f(t)^2 = \frac{1}{2}f(0)^2 + \int_0^t f(x)f'(x) dx \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

VRAI FAUX

Question 30: Cette question est notée sur 6 points.

0 1 2 3 4 5 6

Réservé au correcteur

Soit $f:]-\frac{2}{3}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{3x+2}.$$

(a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-\frac{2}{3}, +\infty[$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{3^n n!}{(3x+2)^{n+1}}.$$

(b) Ecrire la série de Taylor de f autour de $x_0 = \frac{2}{3}$.

(c) Donner le rayon de convergence de la série de Taylor de f donnée au point précédent. Justifier.



CATALOGUE

Question 31: *Cette question est notée sur 5 points.*

0 1 2 3 4 5

Réservé au correcteur

- (a) Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x^2 - x| + |x|$.
- (b) Donner, sans justifier, un exemple de fonction définie sur $[-1, 1]$ qui n'est pas bornée.

