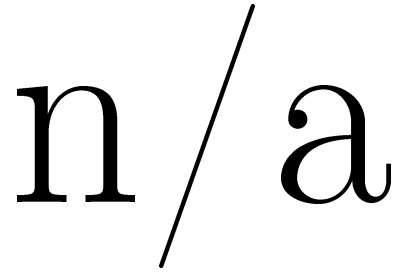
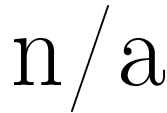
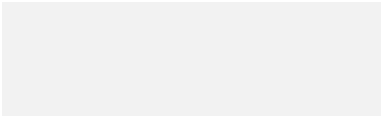


Ens: P. Wittwer
Analyse I - (n/a)
16 janvier 2023
3h30
















SCIPER : 999999

Signature: 

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages (les dernières pouvant être vides), et 30 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question [SCQ-induction-A] : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}$.

- Si $a_0 > 1$, la suite est croissante.
 Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante.
 Si $a_0 < 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.
 Si $a_0 = 0$, la suite est convergente.

Question [SCQ-inf-sup-A] : Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles majorés. Alors :

- $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ $\sup(A \cup B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$
 $\sup(A \cup B) = (\sup A) + (\sup B)$ $\sup(A \cup B) = \min\{\sup A, \sup B\}$

Question [SCQ-complexes-B] : Les nombres complexes $3, 1 - 2i$, et $1 + 2i$ sont les racines du polynôme

- $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$ $z^3 + 14z^2 + 15$
 $z^3 - 2iz^2 + 45$ $z^3 - 5z^2 + 5z + 45$

Question [SCQ-suites-convergence-B] : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $a_n = (3n + 1)^{\ln(\frac{1}{\sqrt{n}})}$. Alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

Question [SCQ-suites-recurrence-A] : Soit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 1$ par $a_n = 3 - \frac{2}{a_{n-1}}$. Alors :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ n'existe pas dans \mathbb{R}
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$

CATALOGUE

Question [SCQ-serie-B] : Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \frac{k+1}{k^2}$, et soit $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Alors :

- la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument
- la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\infty$

Question [SCQ-limsup-liminf-A] : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{6n+8}{2n} \right) - 3 - \frac{4}{n}.$$

Alors :

- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -6$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -14$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -3$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$
- $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = -6$ et $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = 6$

Question [SCQ-serie-parametre-B] : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ converge si et seulement si

- $\alpha < 0$
- $-1 < \alpha < 0$
- $\alpha < -1$
- $\alpha \geq 0$

Question [SCQ-limite-prolongmt-B] : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } x \leq 0, \\ \sin(ax + b) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors f est continue sur \mathbb{R} pour :

- $a = 0$ et $b = \frac{\pi}{4}$
- $a = 0$ et $b = -\frac{\pi}{4}$
- $a = -\frac{\pi}{4}$ et $b = 0$
- $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = \frac{\pi}{2}$

CATALOGUE

Question [SCQ-val-intermed-image-interv-B] : Soit $f: [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Soit I l'ensemble image de f . Alors :

- $I = [1, 2]$

 $I = [2, 3]$

 $I = [1, 1 + \frac{1}{\pi}]$

 $I = [1 - \frac{1}{\pi}, 1]$

Question [SCQ-cont-vs-derivab-B] :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2/|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors :

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe mais f n'est pas continue en $x = 0$
 f est dérivable en $x = 0$
 f est continue mais pas dérivable en $x = 0$

Question [SCQ-contin-deriv-C1-A] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \geq -1, \\ \frac{1}{2}(x^2 + 1) & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Alors :

- f est dérivable en $x = -1$ et continue en $x = 0$
 f est dérivable sur \mathbb{R}
 f est dérivable en $x = 0$ et continue en $x = -1$
 f n'est pas continue en $x = -1$

Question [SCQ-theo-accr-finis-A] : Soit $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \cos(2x)$. Alors pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a :

- $-2 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$

 $-\pi \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq -1$
 $-1 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 1$

 $0 \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 2$

CATALOGUE

Question [SCQ-dev-limite-A] : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \ln(1+x)$. Le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ est donné par

$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

$f(x) = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

$f(x) = x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

Question [SCQ-serie-entiere-A] : Soit $a_n = 1$ si n est pair et $a_n = 0$ si n est impair. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

vaut 1

est infini

vaut 0

vaut $\frac{1}{2}$

Question [SCQ-integrale-first-A] : L'intégrale $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$ vaut

$2 - \frac{5}{e}$

$2 - \frac{1}{e}$

$2 - \frac{3}{e}$

$2 - \frac{4}{e}$

Question [SCQ-integrale-first-B] : L'intégrale $\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-3)(x+2)} dx$ vaut

0

$\ln(3) - \ln(2)$

-1

$\sqrt{6} \arctan(\frac{1}{6})$

Question [SCQ-int-generalisee-B] : L'intégrale généralisée $\int_{0+}^1 \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

diverge

converge et vaut +1

converge et vaut -1

converge et vaut -4

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question [TF-inf-sup-B] : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés. Si $\inf A \leq \inf B$ et $\sup A \geq \sup B$, alors $B \subset A$.

VRAI FAUX

Question [TF-complexes-A] : Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = 1$, alors $z^5 + \frac{1}{z^5}$ est un nombre réel.

VRAI FAUX

Question [TF-induction-suites-limites-A] : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

VRAI FAUX

Question [TF-serie-B] : Soient $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

VRAI FAUX

Question [TF-fonction-etc-A] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Alors la fonction réciproque $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

VRAI FAUX

Question [TF-limites-continuite-B] : Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dont l'ensemble image est $[0, 1]$. Alors il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) - x = 0$.

VRAI FAUX

Question [TF-derivabilite-discussion-A] : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en $x_0 = 0$. Alors la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xf(x)$ est dérivable en $x_0 = 0$.

VRAI FAUX

CATALOGUE

Question [TF-serie-entiere-B] : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f possède un développement limité d'ordre n autour de x_0 .

VRAI FAUX

Question [TF-dev-limite-B] : Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors il existe des nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - a - bx}{x} = 0$$

VRAI FAUX

Question [TF-integrale-A] : L'intégrale $\int_{-1}^1 e^{-\sin(x)} dx$ vaut zéro.

VRAI FAUX

CATALOGUE

Question 30 (*cette question est notée sur 8 points*) :

<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	<input checked="" type="checkbox"/> 8	<i>Réservé au correcteur</i>
----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	---------------------------------------	------------------------------

Soit la fonction $g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{x^2 + 3}{2x}$$

et soit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, définie récursivement par $a_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* a_n = g(a_{n-1})$. Montrer que la suite est bien définie, bornée et monotone. Conclure que la suite est convergente et trouver sa limite.

CATALOGUE

CATALOGUE

CATALOGUE

CATALOGUE

CATALOGUE