EPFL

Ens: P. Wittwer
Analyse I - (n/a)
16 janvier 2023
3h30

n/a

n/a

SCIPER: **999999** Signature:

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages (les dernières pouvant être vides), et 30 questions. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{6n+8}{2n}\right) - 3 - \frac{4}{n}.$$

Alors :

- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -6$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -3$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -6$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 6$
- ☐ $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n = -14$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Question 2 : Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles majorés. Alors :

- ☐ $\sup(A \cup B) = (\sup A) \cdot (\sup B)$
- ☐ $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$
- ☐ $\sup(A \cup B) = \min\{\sup A, \sup B\}$
- ☐ $\sup(A \cup B) = (\sup A) + (\sup B)$

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \geq -1\,, \\ \frac{1}{2}(x^2+1) & \text{si } x < -1\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est dérivable sur $\mathbb{R}$
- ☐ f est dérivable en $x = 0$ et continue en $x = -1$
- ☐ f est dérivable en $x = -1$ et continue en $x = 0$
- ☐ f n'est pas continue en $x = -1$

Question 4 : Soit $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \cos(2x)$. Alors pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$ on a :

- ☐ $-2 \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 0$
- ☐ $-1 \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 1$
- ☐ $-\pi \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq -1$
- ☐ $0 \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq 2$

Question 5 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x-1}{(x-3)\,(x+2)}\,\mathrm{d}x$ vaut

- ☐ 0
- ☐ $\sqrt{6}\,\arctan\left(\frac{1}{6}\right)$
- ☐ $\ln(3) - \ln(2)$
- ☐ -1

Question 6 : Soit $f\colon \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{x}\right).$$

Soit I l'ensemble image de f. Alors :

- [ ] $I = \left[1, 1+\frac{1}{\pi}\right]$
- [ ] $I = [2, 3]$
- [ ] $I = \left[1-\frac{1}{\pi}, 1\right]$
- [ ] $I = [1, 2]$

Question 7 : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ converge si et seulement si

- [ ] $-1 < \alpha < 0$
- [ ] $\alpha < -1$
- [ ] $\alpha \geq 0$
- [ ] $\alpha < 0$

Question 8 : L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0^+}^{1}\frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

- [ ] converge et vaut -1
- [ ] converge et vaut $+1$
- [ ] converge et vaut -4
- [ ] diverge

Question 9 : Les nombres complexes $3, 1-2i$, et $1+2i$ sont les racines du polynôme

- [ ] $z^3 - 5z^2 + 11z - 15$
- [ ] $z^3 - 2iz^2 + 45$
- [ ] $z^3 + 14z^2 + 15$
- [ ] $z^3 - 5z^2 + 5z + 45$

Question 10 : Soit, pour $a_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie pour $n \geq 1$ par $a_n = \dfrac{1}{2}a_{n-1} + \dfrac{1}{2}$.

- [ ] Si $a_0 = 0$, la suite est convergente.
- [ ] Si $a_0 > 1$, la suite est croissante.
- [ ] Si $a_0 < 1$, la suite est décroissante.
- [ ] Si $a_0 < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Question 11 : Soit $a_n = 1$ si n est pair et $a_n = 0$ si n est impair. Le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

- [ ] vaut $\frac{1}{2}$
- [ ] est infini
- [ ] vaut 1
- [ ] vaut 0

Question 12 : Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $a_n = (3n+1)^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$. Alors :

- [ ] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- [ ] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$
- [ ] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- [ ] $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$

Question 13 :
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-2/|x|} & \text{si } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f est continue mais pas dérivable en $x = 0$
- ☐ f est dérivable en $x = 0$
- ☐ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas
- ☐ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existe mais f n'est pas continue en $x = 0$

Question 14 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = e^x \ln(1 + x)$. Le développement limité d'ordre 3 de f autour de $x_0 = 0$ est donné par

- ☐ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = x - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$
- ☐ $f(x) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$

Question 15 : Soit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ définie par $a_0 = \frac{3}{2}$, et pour $n \geq 1$ par $a_n = 3 - \dfrac{2}{a_{n-1}}$. Alors :

- ☐ la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas dans $\mathbb{R}$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$
- ☐ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$

Question 16 : Soient $a,\ b \in \mathbb{R}$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \text{si } x \leq 0\,, \\ \sin(ax + b) & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$ pour :

- ☐ $a = \dfrac{\pi}{2}$ et $b = \dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $a = -\dfrac{\pi}{4}$ et $b = 0$
- ☐ $a = 0$ et $b = -\dfrac{\pi}{4}$
- ☐ $a = 0$ et $b = \dfrac{\pi}{4}$

Question 17 : Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = (-1)^k \dfrac{k+1}{k^2}$, et soit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Alors :

- ☐ la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, mais ne converge pas absolument
- ☐ $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$
- ☐ la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolument

Question 18 : L'intégrale $\int_0^1 x^2 e^{-x}\, dx$ vaut

☐ $2 - \dfrac{5}{e}$ ☐ $2 - \dfrac{3}{e}$ ☐ $2 - \dfrac{1}{e}$ ☐ $2 - \dfrac{4}{e}$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels non-nuls telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective et croissante. Alors la fonction réciproque $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : L'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ vaut zéro.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Alors pour tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f possède un développement limité d'ordre n autour de x_0.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$. Alors il existe des nombres a, $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - a - bx}{x} = 0$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $|z| = 1$, alors $z^5 + \dfrac{1}{z^5}$ est un nombre réel.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue dont l'ensemble image est $[0,1]$. Alors il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) - x = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Soient $A, B \subset \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés. Si $\inf A \leq \inf B$ et $\sup A \geq \sup B$, alors $B \subset A$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui est continue en $x_0 = 0$. Alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = xf(x)$ est dérivable en $x_0 = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites de nombres réels telles que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergent. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, deux questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29 *(cette question est notée sur 8 points)* **:**

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 *Réservé au correcteur*

(a) Énoncer le théorème des accroissements finis vu au cours.

(b) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ et $f(3) = 4$. Montrer, en justifiant soigneusement votre réponse, que l'équation $f''(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 3[$.

Question 30 *(cette question est notée sur 8 points)* :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 *Réservé au correcteur*

Soit la fonction $g\colon\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{x^2+3}{2x}$$

et soit la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, définie récursivement par $a_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*\ a_n = g\left(a_{n-1}\right)$. Montrer que la suite est bien définie, bornée et monotone. Conclure que la suite est convergente et trouver sa limite.