EPFL

Ens: O. Mila
Analyse I - XXX
automne 2025
1 heure

195

FAKE-9

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit la suite

$$x_n = 2\sqrt{n^2+1} - n$$

Alors,

- ☐ $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$
- ☐ $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$

Question 2 : Le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ est

- ☐ $+\infty$
- ☐ $\frac{1}{4}$
- ☐ 4
- ☐ 0

Question 3 : La série $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3-k}}$

- ☐ ne converge pas mais converge absolument
- ☐ ne converge pas et ne converge pas absolument
- ☐ converge mais ne converge pas absolument
- ☐ converge et converge absolument

Question 4 : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ l'ensemble défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \,\middle|\, \frac{1}{x} \geq 2 \right\}.$$

Alors

- ☐ A n'est pas minoré
- ☐ $\inf A = 2$
- ☐ $\inf A = 0$
- ☐ $\inf A = \frac{1}{2}$

Question 5 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, et $(b_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$b_n = 1 + a_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right), \qquad n \geq 0.$$

Alors

- ☐ $\liminf_{n\to\infty} b_n = 1$ et $\limsup_{n\to\infty} b_n = 3$
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} b_n = -1$ et $\limsup_{n\to\infty} b_n = 3$
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} b_n = 3$ et $\limsup_{n\to\infty} b_n = 3$
- ☐ $\liminf_{n\to\infty} b_n = -2$ et $\limsup_{n\to\infty} b_n = 2$

Question 6 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \left|4 - x^2\right| & \text{si } x \leq 0\,, \\ 4\left|x^2 - 1\right| & \text{si } x > 0\,. \end{cases}$$

Alors :

- ☐ f n'est pas continue en $x = 1$
- ☐ f est continue sur $\mathbb{R}$
- ☐ f n'est pas continue en $x = 0$
- ☐ f n'est pas continue en $x = -2$

Question 7 : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si $\lambda \in I$, où I est l'ensemble

- ☐ $]-\infty, 0[$
- ☐ $[-1, +\infty[$
- ☐ $]-\infty, -1[$
- ☐ $]-\infty, 0]$

Question 8 : Soit l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right))}\,.$$

Parmi les nombres complexes ci-dessous, lequel est solution de cette équation?

- ☐ $z = 2(\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right))$
- ☐ $z = \sqrt[3]{4}(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right))$
- ☐ $z = \sqrt[3]{4}(\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{9}\right))$
- ☐ $z = 2(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right))$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ converge.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés, et $c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\sup\{x + c \mid x \in A\} - \sup\{x + c \mid x \in B\} = \sup A - \sup B.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 3$. Alors $\liminf_{n\to\infty} a_n > 3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Les racines du polynôme $z^4 + z^3 - 2z^2 + 2z + 4$ sont $\{-2, -1, \frac{1}{4}, 1 + i\}$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \left(\frac{\lambda + n}{\lambda n}\right)^n.$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que (a_n) converge, on a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

☐ VRAI ☐ FAUX