













Ens: O. Mila
 Analyse I - XXX
 automne 2025
 1 heure

FAKE-9

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 4 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 +3 points si la réponse est correcte,
 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 +1 point si la réponse est correcte,
 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
  		 
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		
     		

Correction

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une **seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit la suite

$$x_n = 2\sqrt{n^2 + 1} - n$$

Alors,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$

Question 2 : Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ est

$+\infty$

$\frac{1}{4}$

4

0

Question 3 : La série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3 - k}}$

ne converge pas mais converge absolument

ne converge pas et ne converge pas absolument

converge mais ne converge pas absolument

converge et converge absolument

Question 4 : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ l'ensemble défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{x} \geq 2 \right\}.$$

Alors

A n'est pas minoré

$\inf A = 2$

$\inf A = 0$

$\inf A = \frac{1}{2}$

Question 5 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, et $(b_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$b_n = 1 + a_n \cos\left(n \frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

Alors

$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$

$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$

Correction

Question 6 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} |4 - x^2| & \text{si } x \leq 0, \\ 4|x^2 - 1| & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Alors :

f n'est pas continue en $x = 1$

f est continue sur \mathbb{R}

f n'est pas continue en $x = 0$

f n'est pas continue en $x = -2$

Question 7 : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si $\lambda \in I$, où I est l'ensemble

$] -\infty, 0[$

$[-1, +\infty[$

$] -\infty, -1[$

$] -\infty, 0]$

Question 8 : Soit l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))}.$$

Parmi les nombres complexes ci-dessous, lequel est solution de cette équation?

$z = 2(\cos(\frac{7\pi}{9}) + i \sin(\frac{7\pi}{9}))$

$z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{13\pi}{12}) + i \sin(\frac{13\pi}{12}))$

$z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{\pi}{9}) + i \sin(\frac{\pi}{9}))$

$z = 2(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i \sin(\frac{7\pi}{12}))$

Correction

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ converge.

VRAI FAUX

Question 10 : Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés, et $c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\sup\{x + c \mid x \in A\} - \sup\{x + c \mid x \in B\} = \sup A - \sup B.$$

VRAI FAUX

Question 11 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 3$. Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 3$.

VRAI FAUX

Question 12 : Les racines du polynôme $z^4 + z^3 - 2z^2 + 2z + 4$ sont $\{-2, -1, \frac{1}{4}, 1 + i\}$.

VRAI FAUX

Question 13 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$a_n = \left(\frac{\lambda + n}{\lambda n} \right)^n.$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que (a_n) converge, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

VRAI FAUX