













Ens: Olivier Mila
Analyse I - Section
13 janvier 2025
3h30

Student

SCIPER: **999999**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant·e sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant·e se réserve le droit de l'annuler.

| Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien | | |
|--|---|---|
| choisir une réponse select an answer Antwort auswählen | ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen | Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren |
|    |  |   |
| ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte | | |
|       | | |

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

Question 1 : La série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda n}}{n^{1+\lambda}}$$

converge si et seulement si $\lambda \in I$, où I est l'ensemble

- $]-\infty, 0[$
 $[-1, +\infty[$
 $]-\infty, -1[$
 $]-\infty, 0]$

Question 2 : Soit l'équation

$$\frac{|z|}{z} = \frac{z^2}{4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))}$$

Parmi les nombres complexes ci-dessous, lequel est solution de cette équation?

- $z = 2(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i \sin(\frac{7\pi}{12}))$
 $z = 2(\cos(\frac{7\pi}{9}) + i \sin(\frac{7\pi}{9}))$
 $z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{13\pi}{12}) + i \sin(\frac{13\pi}{12}))$
 $z = \sqrt[3]{4}(\cos(\frac{\pi}{9}) + i \sin(\frac{\pi}{9}))$

Question 3 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction bijective définie par

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$

et soit $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa fonction réciproque. Alors $(f^{-1})'(1)$ est égal à

- $\frac{1}{3}$
 $\frac{1}{5}$
 $\frac{1}{6}$
 $\frac{1}{78}$

Question 4 : Soit $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{x+1}(x^2 - 2x + 1)$. Alors son ensemble image, $f([-1, 2])$, est égal à

- $[0, e^3]$
 $[4, e^3]$
 $[0, 4]$
 $[0, +\infty[$

Question 5 : L'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 - 4} dx$ vaut

- $-\frac{1}{4} \log(3)$
 $2 \log(3)$
 $\frac{1}{2} \log(3)$
 $-\frac{1}{2} \log(3)$

Question 6 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Alors, en $x = 0$, f est

- dérivable à droite mais pas à gauche
 dérivable à gauche mais pas à droite
 dérivable à gauche et à droite mais n'est pas dérivable
 dérivable

CORRECTION

Question 7 : Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\log(|\log(x)|)}{\log(x)}.$$

Alors

- $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0$
 $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \downarrow 0} f(x) = -1$

Question 8 : L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\log(t)}{t^2} dt$

- converge et vaut 2
 converge et vaut $\frac{1}{2}$
 diverge
 converge et vaut 1

Question 9 : La limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n(n+3)} \right)^n$$

existe et vaut

- e^{-3}
 e^{-1}
 0
 1

Question 10 : Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ l'ensemble défini par

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \mid \frac{1}{x} \geq 2 \right\}.$$

Alors

- $\inf A = 0$
 $\inf A = \frac{1}{2}$
 $\inf A = 2$
 A n'est pas minoré

Question 11 : Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ est

- $\frac{1}{4}$
 $+\infty$
 4
 0

Question 12 : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par $u_0 = \sqrt{3}$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{3u_{n-1}}$. Alors

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{3}$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 3$
 $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Question 13 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\log(x^2 + 1)}{3x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Alors

- f est de classe C^1 sur \mathbb{R}
 f est dérivable mais n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R}
 f n'est pas continue sur \mathbb{R}
 f est continue mais n'est pas dérivable sur \mathbb{R}

CORRECTION

Question 14 : Soit $f(x) = \log\left(\frac{3}{2} + x\right)$. Alors, le développement limité d'ordre 2 de f en $x_0 = 0$ est donné par

$\log\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$\log\left(\frac{1}{2}\right) + x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

$\log\left(\frac{3}{2}\right) + \log\left(\frac{3}{2}\right)x - \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$\log\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

Question 15 : La série $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k^3 - k}}$

 ne converge pas mais converge absolument

 converge mais ne converge pas absolument

 converge et converge absolument

 ne converge pas et ne converge pas absolument

Question 16 :

Soit $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et les suites $(a_k)_{k \geq 0}$, $(b_k)_{k \geq 0}$ définies par

$$a_k = f(2k) \quad \text{et} \quad b_k = f(2k + 1).$$

Si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = -1, \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1,$$

alors, l'équation $f(x) = 0$

 possède une infinité de solutions

 possède exactement une solution

 possède exactement deux solutions

 ne possède aucune solution

Question 17 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$, et $(b_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par

$$b_n = 1 + a_n \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right), \quad n \geq 0.$$

Alors

 $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = -2$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$

Question 18 : L'intégrale $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$ vaut

$\frac{8 - 2\sqrt{2}}{3}$

$\frac{4 - 2\sqrt{2}}{3}$

$4 - 2\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2} + 1}{3}$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite bornée telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 3$. Alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n > 3$.

VRAI FAUX

Question 20 : Il existe une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée et injective.

VRAI FAUX

Question 21 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Alors

$$\frac{1}{2}f(t)^2 = \frac{1}{2}f(0)^2 + \int_0^t f(x)f'(x) dx \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

VRAI FAUX

Question 22 : Si la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x-1)^k$ converge pour $x=0$, alors elle converge pour $x=2$.

VRAI FAUX

Question 23 : Soient f et g deux fonctions possédant des développements limités d'ordre 1 en $x_0 = 0$, donnés par

$$f(x) = 1 + 2x + x\varepsilon(x),$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x).$$

Alors le développement limité d'ordre 1 de $f(g(x))$ en $x_0 = 0$ est donné par

$$f(g(x)) = 3 + x + x\varepsilon(x).$$

VRAI FAUX

Question 24 : Les racines du polynôme $z^4 + z^3 - 2z^2 + 2z + 4$ sont $\{-2, -1, \frac{1}{4}, 1+i\}$.

VRAI FAUX

Question 25 : Soit $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une fonction continue $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0, 1[$.

VRAI FAUX

CORRECTION

Question 26 : Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux ensembles non vides et bornés, et $c \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\sup\{x + c \mid x \in A\} - \sup\{x + c \mid x \in B\} = \sup A - \sup B.$$

VRAI FAUX

Question 27 : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ une fonction dérivable. Alors la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ définie par $g(x) = f(x)^{f(x)}$ est aussi dérivable sur \mathbb{R} .

VRAI FAUX

Question 28 : Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b_n}$ converge.

VRAI FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 29: Cette question est notée sur 4 points.

0 1 2 3 4

Réservé au correcteur

(a) Complétez la preuve suivante (dans les rectangles):

Proposition. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+2)} = 0$.

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On pose $N =$. Alors, dès que $n \geq N$, on a

$$\left| \frac{1}{\log(n+2)} - 0 \right| = \frac{1}{\log(n+2)} \leq \frac{1}{\log(N+2)} \leq \text{} .$$

Comme ε était arbitraire, on a bien montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+2)} = 0$.

(b) Donner la définition formelle de

$$\lim_{x \downarrow 6} f(x) = -\infty \quad (\text{autre notation : } \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = -\infty)$$

On pourra soit donner la définition à l'aide de suites, soit avec ε, δ .



CORRECTION

Question 30: Cette question est notée sur 4 points.

₀ ₁ ₂ ₃ ₄ *Réservé au correcteur*

On considère la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x \cdot 5^x$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

$$f^{(n)}(x) = \left(x + \frac{n}{\log(5)}\right) \cdot \log(5)^n \cdot 5^x$$



CORRECTION

Question 31: Cette question est notée sur 8 points.

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Réservé au correcteur

(a) Montrer que $\log(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq 0$.

(b) Calculer l'intégrale $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \log(1+x) dx$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) La série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge-t-elle? Justifier votre réponse (en utilisant (a) ou (b) ou les deux).



Question 29:

(a) **Proposition.** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+2)} = 0.$

Preuve: Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On pose $N = \boxed{e^{1/\varepsilon} - 2}$. Alors, dès que $n \geq N$, on a

$$\left| \frac{1}{\log(n+2)} - 0 \right| = \frac{1}{\log(n+2)} \leq \frac{1}{\log(N+2)} \leq \boxed{\frac{1}{\log(e^{1/\varepsilon})} = \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \leq \varepsilon}.$$

Comme ε était arbitraire, on a bien montré que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log(n+2)} = 0.$

(b) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ tel que $x \in]6, 6 + \delta] \Rightarrow f(x) \leq A.$

Pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_n > 6$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = -\infty.$

Question 30:

Initialisation ($n = 0$): $f^{(0)}(x) = f(x) = x5^x = \left(x + \frac{0}{\log(5)}\right) \cdot \log(5)^0 \cdot 5^x.$

Pas de récurrence ($n \rightarrow n + 1$):

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = \left(\left(x + \frac{n}{\log(5)}\right) \cdot \log(5)^n \cdot 5^x \right)' \\ &= \log(5)^n \cdot 5^x + \left(x + \frac{n}{\log(5)}\right) \cdot \log(5)^n \cdot 5^x \cdot \log(5) \\ &= \left(x + \frac{n+1}{\log(5)}\right) \cdot \log(5)^{n+1} \cdot 5^x \end{aligned}$$

Question 31:

(a) On montre que $f(x) = x - \log(1+x) \geq 0$ pour $x \geq 0$. On a $f(0) = 0$ et $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} > 0$ si $x > 0$, donc la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi $f(x) \geq f(0) = 0$ dès que $x \geq 0$.

(b) *Méthode 1:* On pose $u = 1+x$ et on utilise la primitive $u(\log(u) - 1)$ de $\log(u)$:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{1/n} \log(1+x) dx = \int_1^{1+1/n} \log(u) du = \left[u(\log(u) - 1) \right]_{u=1}^{u=1+1/n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right) + 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

1. ou la partie entière +1 de ce nombre

Méthode 2: On intègre par parties:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_0^{1/n} 1 \cdot \log(1+x) dx = \left[x \log(1+x) \right]_{x=0}^{1/n} - \int_0^{1/n} \frac{x+1-1}{1+x} dx \\
 &= \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \int_0^{1/n} \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \\
 &= \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left[\log(1+x) - x \right]_{x=0}^{1/n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}.
 \end{aligned}$$

(c) *Méthode 1:* On utilise (a) pour voir que

$$0 \leq a_n = \int_0^{1/n} \log(1+x) dx \leq \int_0^{1/n} x dx = \frac{1}{2n^2}.$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge par comparaison.

Méthode 2: On pose $x = \frac{1}{n}$ et on utilise un DL₂

$$(1+x) \log(1+x) - x = (1+x) \left(x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x) \right) - x = \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x).$$

Comme $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ et $x = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, on a $\varepsilon(x) = \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$ pour n assez grand. Ainsi

$$0 \leq a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \cdot 1 = \frac{3}{2n^2}$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2}$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge par comparaison.

Méthode 3: On utilise (a) dans la formule de (b):

$$0 \leq a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

Comme la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge par comparaison.