

Exercice 1. (Calcul de limites 1/2)

Calculer les limites suivantes:

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1}$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{2}{1 - x^2} \right)$ | (h) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 1/h^2}{1 + 1/h^2}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)$ | (i) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(2x) - 1}{\sin(x^2)}$ | (f) $\lim_{h \rightarrow 0} \sin(a + h)$ | (j) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \arccos(9x^2)$. |
| | (g) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a}$ | |

Indication: On pourra utiliser les formules trigonométriques suivantes: Pour $x, y \in \mathbb{R}$, $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$ et $\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$.

Exercice 2. (Limites avec ε, δ)

Montrer directement à partir de la définition que

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 9.$$

Expliciter **clairement** le δ associé à chaque ε .

Exercice 3. (Calcul de limites 2/2)

Calculer les limites suivantes (si elles existent):

- | | | |
|--|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x^2 - 4}$ | (c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{ x - 3 }{x - 3}$ | (e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x - 6 - x^2}{4 - x^2}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$, | (d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x - 6 - x^2}{4 - x^2}$ | (f) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\tan^2(x - \alpha)}{(x - \alpha)^2}$ |

Exercice 4. (Comparaisons de fonctions)

- Donner un exemple d'une fonction $f(x)$ non constante telle que $|f(x)| \leq x^2$ au voisinage de $x_0 = 0$.
- Donner un exemple d'une fonction $f(x)$ non constante telle que pour tout $C > 0$, il existe un voisinage de $x_0 = 0$ tel que $|f(x)| \leq Cx^2$ dans ce voisinage.
- Pour une fonction comme au (b), que peut-on dire sur la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$?
- Compléter les équivalences suivantes:

Pour tout $C > 0$, il existe un voisinage de $x_0 = 0$ où $|f(x)| \leq C|x|^k$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \text{[grisé]}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^k \varepsilon(x), \text{ où } \varepsilon(x) \text{ est une fonction telle que [grisé]}$$

Exercice 5. (*Continuité en un point*)

Les fonctions suivantes sont-elles continues en $x = 0$?

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{2x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases} & \text{(c) } f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases} \\ \text{(b) } f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} & \text{(d) } f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Exercice 6. (*QCM type examen*)

Soit $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|-1}$. Alors:

- $f(x)$ possède un prolongement par continuité en $x = 1$ et en $x = -1$.
- $f(x)$ possède un prolongement par continuité en $x = 1$ mais pas en $x = -1$.
- $f(x)$ possède un prolongement par continuité en $x = -1$ mais pas en $x = 1$.
- $f(x)$ ne possède pas de prolongement par continuité.

Exercice 7. (*Continuité des fonctions trigonométriques*)

Montrer que les fonctions trigonométriques $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ et les réciproques $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$ sont continues en tout point de leur domaine.