Analyse I — Série 7

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 03.11.2025

Exercice 1. *(Séries à paramètre / Séries entières)*
Calculer le domaine de convergence des séries à paramètre x suivantes. Puis, déterminer s'il s'agit de séries entières, et donner leur rayon de convergence si c'est le cas.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (x-a)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2k} k^2}(x-1)^k$

(h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^n$

Exercice 2. *(Rappels fonctions 1/5)*
Donner le domaine de définition et étudier la parité et la périodicité des fonctions f suivantes, en donnant la période fondamentale le cas échéant.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 \cos(3x)}{1+\sin(x)^2}$

(b) $f(x) = 2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cos\left(\frac{1}{3}x\right)$

(c) $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)^2$

(d) $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{1-\sqrt{x^2-3}}$

Exercice 3. *(Rappels fonctions 2/5)*
Donner un exemple d'une fonction réelle f telle que:

(a) $D(f) = \mathbb{R}$, f est décroissante et son image est $]0, \infty[$.

(b) f est paire, définie sur $\mathbb{R}$, et son image est $[0, 1]$.

(c) $(f \circ g)(x) = (x-3)(x+3)$ où $g(x) = x^2 - 10$.

(d) $D(f) = [-1, 1]$, f est impaire, et ne possède pas de fonction réciproque.

Exercice 4. *(Rappels fonctions 3/5)*
Déterminer (s'ils existent) $\sup\limits_{x\in A} f(x), \inf\limits_{x\in A} f(x), \max\limits_{x\in A} f(x)$, et $\min\limits_{x\in A} f(x)$ pour:

(a) $f(x) = x, \quad A = \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad A =]0, +\infty[$.

(c) $f(x) = x^2, \quad A = [1, 4[$.

(d) $f(x) = \sin(x), \quad A =]-\frac{\pi}{2}, \pi[$.

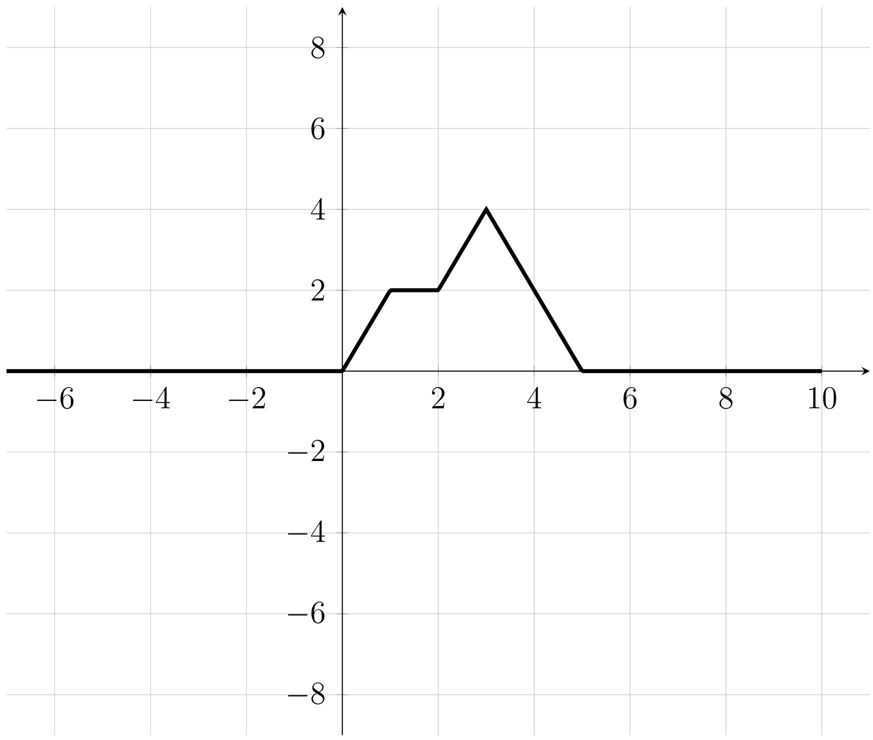
(e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}, \quad A =]-1, 1[$.

(f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}, \quad A = \mathbb{R}$.

Exercice 5. *(Rappels fonctions 4/5)*
Calculer les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ des fonctions réelles suivantes:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \geq 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ x+2 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Exercice 6. *(Rappels fonctions 5/5)*
Soit $f(x)$ la fonction réelle dont le graphe est représenté ci-dessous. Tracer les graphes des fonctions suivantes sur la même figure: $f_1(x) = f(-x)$, $f_2(x) = f(x-3)$, $f_3(x) = \frac{1}{2}f(2x)$, $f_4(x) = 2f\left(\frac{1}{2}x\right)$, $f_5 = -\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}x+1\right) - 2$.



Exercice 7. *(Epsilonade)*
Écrire mathématiquement (avec $\varepsilon, \delta, \dots$) les phrases suivantes.

(a) $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ pourvu que x soit assez proche de 17.

(b) $f(x) \neq 0$ pour x assez proche de x_0.

(c) $f(x) \leq x^2$ pour x assez grand.

(d) $|f(x)| \leq x^2$ au voisinage de $x_0 = 0$.