

Exercice 1. (*Liminf / limsup*)

Calculer $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ dans les cas suivants:

- | | |
|--|--|
| (a) $a_n = (-3)^{-n} - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ | (d) $a_n = \frac{\cos(\pi n)}{\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$ |
| (b) $a_n = \operatorname{Re}(e^{i2\pi n/3})$ | (e) $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
(où $\lfloor x \rfloor =$ le plus grand entier $\leq x$) |
| (c) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ | |

Exercice 2. (*V/F type examen*)

Vrai ou faux ?

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$.
- (b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, alors (a_n) diverge.
- (c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, alors (a_n) converge.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - a| = 0$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.
- (e) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, alors (a_n) est croissante.
- (f) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.
- (g) Si $(a_n b_n)$ converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, alors (a_n) converge.
- (h) Si $(a_n b_n)$ converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell \neq 0$, alors (a_n) converge.
- (i) Si $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (j) Si $\liminf_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Exercice 3. (*Convergence série géométrique*)

En s'inspirant d'un exemple du cours, montrer que la série géométrique $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$

- (a) converge et vaut $\frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$,
- (b) diverge si $|q| \geq 1$.

Exercice 4. (*Convergence série $\frac{1}{k^p}$*)

En s'inspirant d'un exemple du cours, montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$

- (a) converge si $p > 1$,
- (b) diverge si $p \leq 1$.

Exercice 5. (Convergence de séries)

Étudier la convergence des séries suivantes.

$$\begin{array}{lll}
\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2^k} & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n-2} & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} \\
\text{(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3k+2}{4k+5}\right)^k & \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) & \text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+4)(n-3)}{7n^3+n+2} \\
\text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n} & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n^2}\right) & \text{(j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4} - \sqrt{n}}{n} \\
& \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+7} - n) &
\end{array}$$

Exercice 6. (Valeur de séries)

Calculer les valeurs des séries suivantes.

$$\begin{array}{ll}
\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} & \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\
\text{(b)} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k-1}}\right) & \text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+3)}
\end{array}$$

Exercice 7. (V/F type examen)

Vrai ou faux ?

- (a) Si $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
- (b) Si on a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.
- (c) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.
- (d) Si $(a_n)_{n \geq 0}$ est strictement décroissante, alors $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge.
- (e) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.
- (f) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolument, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.
- (g) Si on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- (h) Si $a_k = 5^k$ pour $k = 1, \dots, 1000$, et $a_k = \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ si $k > 1000$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.
- (i) Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergent, alors $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ converge et on a
- $$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$