

Exercice 1. (Calcul de limites dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$)

Calculer les limites $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ des suites suivantes, si elles existent.

(a) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

(e) $a_n = \frac{\sin(\sqrt{n^2 + 2})}{2n + 1}$

(b) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(f) $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}$

(c) $a_n = n^2 3^n 2^{-3n/2}$

(g) $a_n = \left(2^{-n} + 1\right)^{1/\sqrt{n}}$

(d) $a_n = \frac{(3n + 8) \cos(6n^2 + n + 1)}{n^2 + 2n + 6}$

(h) $a_n = (n!)^{1/n}$

Exercice 2. (Calcul de limite avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$)

Soit $p(x)$ un polynôme (réel) tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = +\infty$. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p(n)}$.

Exercice 3. (Suites et sous-suites / Limites avec ε)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ si et seulement si $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \ell$ pour toute sous-suite $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 4. (Calcul de limites avec e)

En utilisant le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e =$ nombre d'Euler, calculer les limites suivantes:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

Exercice 5. (QCM type examen)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_n = \frac{(n + 5)^{1/2} - (n + 4)^{1/2}}{(n + 3)^{-1/2}}$. Alors

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$

Exercice 6. (*Sous-suites convergentes, 1/2*)

Trouver une sous-suite $(a_{n_k})_k$ convergente des suites $(a_n)_n$ suivantes:

- (a) $a_n = (-1)^n + (-2)^{-n}$ (d) $a_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$
(b) $a_n = (4n^2 + 1) \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) \cos(\pi n)$ (e) $a_n = \frac{\cos(\pi n)}{\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)}$
(c) $a_n = \frac{(-1)^{2n+1} + (-1)^{4n-2}}{(-1)^{n+3}}$

Exercice 7. (*Sous-suites convergentes, 2/2*)

Pour les suites $(a_n)_n$ suivantes, trouver une sous-suite $(a_{n_k})_k$ convergeant vers la valeur donnée.

- (a) $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}(n^3 - 1)\right)$ (i) $a_{n_k} \rightarrow 0$, (ii) $a_{n_k} \rightarrow -1$ (**Difficile**).
(b) $a_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ (i) $a_{n_k} \rightarrow 0$, (ii) $a_{n_k} \rightarrow \frac{1}{2}$ (**Difficile**).

où $\lfloor x \rfloor$ est la *partie entière* de x , définie comme

$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor &= \text{plus grand entier } \leq x \\ &= \text{unique } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leq x < n + 1. \end{aligned}$$

Exercice 8. (*V/F type examen*)

Vrai ou Faux ?

- (a) Si $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(|a_n|)$ converge.
(b) Si $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (a_n) est bornée.
(c) Si $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (a_n) converge.
(d) Si $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\left(\frac{1}{a_n^2}\right)$ converge.
(e) Si $|a_{n+1}| < |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$.
(f) Toute suite de Cauchy est bornée.
(g) Si $|a_{n+1} - a_n| \leq 10^{-n}$ pour tout n , alors (a_n) est de Cauchy.
(h) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+k} - a_n| = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé, alors (a_n) est de Cauchy.