Analyse I — Série 4

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 06.10.2025

Exercice 1. *(Preuves par récurrence, 1/2)*
Démontrer les assertions suivantes par récurrence.

(a) Si $a_0 = c$ et $a_{n+1} = a_n + b$, alors $a_n = bn + c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Si $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1}$, alors $a_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = x^n - 1$ pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. *(Rappel factorielle / coefficient binomial)*
On rappelle que la *factorielle de* $n \in \mathbb{N}$ est $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, et que $0! = 1$ par convention. Pour $k, n \in \mathbb{Z}$, on définit le *coefficient binomial* comme

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad \text{si } 0 \leq k \leq n, \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{k} = 0 \quad \text{sinon.}$$

(a) Simplifier les expressions $\dfrac{n(n+1)!}{(n+1)(n-1)!} \cdot \dfrac{(n-1)(n+2)!}{(n+2)n!}$ et $\dfrac{(n+1)\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}}$.

(b) Montrer directement (sans récurrence) que: $\dbinom{n+1}{k} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k-1}$.

(c) Montrer la *Formule du Binôme de Newton* par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \qquad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{C}.$$

Exercice 3. *(Preuves par récurrence, 2/2)*
Démontrer les formules suivantes:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = f_{n+1}$ où (f_n) est la *suite de Fibonacci*.

Exercice 4. *(Suite de Fibonacci)*
Le but de cet exercice est de montrer que la *suite de Fibonacci* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_0 = 0,\ f_1 = 1,$ et $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ est donnée par la formule

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}, \qquad \text{où } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

(a) Montrer que α et β vérifient l'équation $x^2 = x + 1$.

(b) En déduire qu'ils vérifient aussi l'équation $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$.

(c) Montrer que, si $a_n = c \cdot \alpha^n + d \cdot \beta^n$ (où $c, d \in \mathbb{R}$), alors $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

(d) Conclure (en utilisant une preuve par récurrence double).

Exercice 5. *(Croissance des suites géométriques)*
Soit $a_n = ar^n$ ($n \in \mathbb{N}$) une suite géométrique avec $a > 0$. Montrer que (a_n) est

(a) bornée si et seulement si $r \in [-1, 1]$

(b) minorée si et seulement si $r \geq -1$

(c) strictement croissante si et seulement si $r > 1$

(d) strictement décroissante si et seulement si $0 < r < 1$

(e) constante si et seulement si $r = 1$.

Exercice 6. *(Croissance et calcul de limites)*
Pour les suites suivantes, déterminer si elles sont (strictement) (dé)croissantes, bornées, convergentes. Si elles convergent, calculer leur limite lorsque $n \to \infty$.

(a) $a_n = \dfrac{3n}{n+2}$

(b) $a_n = \dfrac{5n^2 + 3n + 7}{3n^2 + 7}$

(c) $a_n = \dfrac{3n^2 + 1}{n - 1}$

(d) $a_n = \dfrac{n - 1}{3n^2 + 1}$

(e) $a_n = \dfrac{(n-1)^2}{3n^2 + 1}$

(f) $a_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$

(g) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(h) $\dfrac{\sqrt{n^2 + 2}}{2n}$

(i) $\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 3}$

(j) $\sqrt{n^2 - 1} - (n - 1)$

(k) $n\left(\sqrt{n^4 + 6n - 3} - n^2\right)$

Exercice 7. *(Convergence avec ε)*

(a) En utilisant la définition de convergence avec ε, montrer que $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + 7}{\sqrt{n}}$ converge vers 1.

(b) Si (a_n) est une suite telle que $a_n \longrightarrow a$, démontrer que $|a_n| \longrightarrow |a|$.

(c) Trouver un exemple où $|a_n| \longrightarrow |a|$, mais où (a_n) diverge.

Exercice 8. *(Sup/inf avec suites)*

(a) Recalculer le sup/inf des ensembles (d), (g) et (i) de l'exercice 3, série 2 en utilisant la caractérisation du sup/inf avec les suites (Prop. 2.2 du cours).

(b) **(Difficile)** Démontrer la Prop. 2.2 du cours.

Exercice 9. *(V/F type examen)*
Vrai ou faux ?

(a) Si (a_n) est bornée, alors a_n converge.

(b) Si (a_n) converge et $a_n > 0$ pour tout n, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$.

(c) Si (a_n) converge vers a, alors $|a_n - a| < 10^{30}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Si $(a_n + 3b_n)$ converge, alors (a_n) et (b_n) convergent.

(e) Si (a_n+3b_n) converge, alors au moins une des deux suites (a_n) ou (b_n) converge.