Analyse I — Série 3

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 29.09.2025

Exercice 1. *(Calculs dans $\mathbb{C}$, 1/3)*
Écrire les nombres complexes suivants en forme cartésienne:

$$i^7, \quad (2-3i)^2, \quad \frac{1}{2+i}, \quad (1+i)^2, \quad (1+i)^4, \quad (1+\sqrt{3}i)^6$$

Exercice 2. *(Calculs dans $\mathbb{C}$, 2/3)*
Calculer $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z}$, $|z|$, $\arg(z)$, et $\dfrac{1}{z}$ pour les nombres complexes suivants:

$$1+i, \quad 14, \quad 2-2\sqrt{3}i, \quad 2e^{3i}, \quad -\pi i$$

Exercice 3. *(Calculs dans $\mathbb{C}$, 3/3)*
Écrire les nombres complexes suivants en forme cartésienne et en forme polaire (exponentielle).

(a) $2(1+i)$

(b) $3e^{i\frac{\pi}{2}}$

(c) $\frac{8i^{21}-2i^{11}}{1-i}$

(d) $(2-3i)(3+2i)$

(e) $\frac{2-3i}{3+2i}$

(f) $\left(\frac{1}{i}\right)^{19}$

(g) e^{i-50}

(h) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1+2i}$

(i) $e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{i\frac{3\pi}{8}}$

Exercice 4. *(Formule générale pour $\arg(z)$)*
Montrer que l'argument $\arg(z)$ d'un nombre $z=a+bi$, est donné par:

	si $a>0$	si $b>0$	si $b<0$	si $a<0$ et $b=0$
$\arg(z) =$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$	$\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$	$-\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$	π

Exercice 5. *(Propriétés de $\bar{z}$)*

(a) Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, montrer que

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}, \quad \text{et} \quad \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$$

(b) Pour $z \in \mathbb{C}$, montrer que $\overline{e^{z}} = e^{\bar{z}}$.

(c) Soit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme a coefficients réels (i.e. $a_i \in \mathbb{R}$). En utilisant (a), montrer que si $z_0 \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors $\overline{z_0}$ est aussi une racine de P. Est-ce toujours vrai si les a_i ne sont pas tous réels ?

Exercice 6. *(Equations dans $\mathbb{C}$)*
Résoudre les équations suivantes pour $z \in \mathbb{C}$.

(a) $z^5 = -1$

(b) $z^2 = 3 - 4i$

(c) $z^4 = -2i$

(d) $z^2 = \left(1 + \sqrt{3}i\right)^8$

(e) $z^2 + 6z + 12 - 4i = 0$

(f) $z^6 + 4z^3 + 2 = 0$

Exercice 7. *(Polynômes)*

(a) Décomposer le polynôme $z^5 + 1$ en produit de facteurs irréductibles complexes, puis en produit de facteurs irréductibles réels.

(b) Même question pour le polynôme $z^6 + 4z^3 + 2$.

Exercice 8. *(Relation $e^{ix} \leftrightarrow \sin$ et $\cos$)*
(Re)démontrer la formule:

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$

Exercice 9. *(QCM type examen)*
Les racines du polynôme $z^4 - 6z^3 + 10z^2 + 2z - 15$ sont:

☐ $1 + i, \quad 1 - i, \quad 3, \quad -1$

☐ $2 + i, \quad 2 - i, \quad 3, \quad -1$

☐ $2 + i, \quad 1 + i, \quad 3, \quad -1$

☐ $1 + i, \quad 1 - i, \quad 5, \quad -1$

Exercice 10. *(QCM type examen)*
Soit $z = \dfrac{5i^7 - i^{13}}{3 - 3i}$. Alors

☐ $z^4 = 4$

☐ $z^4 = 12 - 12i$

☐ $z^4 = -4$

☐ $z^4 = -12 + 12i$

Exercice 11. *(V/F type examen)*
Vrai ou faux ?

(a) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^{\arg(z)} = \arg(e^z)$.

(b) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^{|z|} = |e^z|$.

(c) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^{\mathrm{Re}(z)} = \mathrm{Re}(e^z)$.

(d) Pour $z \in \mathbb{C}$, $e^{\mathrm{Re}(z)} = |e^z|$.