

Exercice 1. (*Irrationalité et nombres réels*)

Montrer que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 2. (*Rappel intervalles*)

Réécrire les ensemble suivants en utilisant la notation d'intervalles.

- (a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| \leq 1\}$. (d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x < 3 \text{ et } x^2 \geq 4\}$.
 (b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \leq 1\}$. (e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x^3 \geq 3\}$.
 (c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 2\}$. (f) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 2| < 1\}$.

Exercice 3. (*Ensembles maj/minorés, min/max et inf/sup*)

Parmi les sous-ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$ suivants, déterminer s'ils sont majorés, minorés ou bornés, calculer $\sup A$ et $\inf A$, ainsi que $\max A$ et $\min A$ (s'ils existent).

- (a) $A =]-1, \sqrt{2}]$. (f) $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
 (b) $A =]\sqrt{3}, \infty[$.
 (c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 1| \leq 1\}$. (g) $A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$.
 (d) $A = \left\{ 3 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$. (h) $A = \mathbb{Q}$.
 (e) $A = \left\{ \frac{(-1)^{2n+1} + (-1)^{4n-2}}{(-1)^{n+3}} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. (i) $A = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$.

Exercice 4. (*Représentation décimale*)

- (a) Montrer que $0.\bar{9} = 1$.
 (b) Écrire 3.14159 et $55.\overline{612}$ sous forme de fraction $\frac{a}{b}$.
 (c) Déterminer (sans calculatrice!) la représentation décimale de $\frac{8}{13}$.

Exercice 5. (*QCM type examen*)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble défini par

$$A = \left\{ x \in]-1, +\infty[\mid \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 7 \right\}.$$

Alors:

- A n'est pas minoré. $\inf A = -1$.
 $\inf A = 0$. $\inf A \in]-1, 0[$.

Exercice 6. (*QCM type examen*)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ l'ensemble défini par

$$A = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Alors:

$\inf A = -1$ et $\sup A = 2$. $\inf A = 0$ et $\sup A = 2$.

$\inf A = -1$ et $\sup A = 1$. $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$.

Exercice 7. (*V/F type examen*)

Vrai ou faux ?

- (a) La somme de deux nombres rationnels est rationnelle.
- (b) La somme de deux nombres irrationnels est irrationnelle.
- (c) La somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.
- (d) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et majoré, alors $\max A \in \mathbb{R}$ existe.
- (e) Si $A \subseteq \mathbb{R}$ est non vide et majoré, alors $\sup A \in \mathbb{R}$ existe.
- (f) Pour $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide, si $\sup A = \inf A$, alors A ne contient qu'un élément.