Analyse I — Série 1

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 08.09.2025

Exercice 1. *(Ensembles 1/3)*
On considère les ensembles $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$. Déterminer

$$A \cup B,\ \ A \cap B,\ \ A \setminus B,\ \ B \setminus A,\ \ E \setminus A,\ \ E \setminus B,\ \ E \setminus (A \cup B),\ \ E \setminus (A \cap B).$$

Exercice 2. *(Ensembles 2/3)*
Soit X et Y deux sous-ensembles de l'ensemble Z. Montrer que

$$Z \setminus (X \cup Y) = Z \setminus X \ \cap\ Z \setminus Y, \quad \text{et} \quad Z \setminus (X \cap Y) = Z \setminus X \ \cup\ Z \setminus Y.$$

Exercice 3. *(Ensembles 3/3)*
Décrire les ensembles suivants sous la forme $X = \{\text{élément} \mid \text{condition}\}$, et sous la forme $X = \{a, b, c, \dots\}$ (liste d'éléments avec …).

(a) L'ensemble des entiers négatifs ou nuls.

(b) L'ensemble des entiers pairs.

(c) L'ensemble des entiers impairs.

(d) L'ensemble des entiers strictement positifs divisibles par 3, sans 12.

Exercice 4. *(Rappel trigonométrie)*
En utilisant le cercle trigonométrique et en dessinant des triangles rectangles et équilatéraux, remplir le tableau suivant:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	2π	$-\alpha$	$\alpha+\pi/2$	$\alpha+\pi$	$\alpha+2\pi$
$\sin(\alpha)$											
$\cos(\alpha)$											
$\tan(\alpha)$											

Exercice 5. *(Injectivité / surjectivité)*
Soient X et Y deux ensembles, et $f \colon X \to Y$ et $g \colon Y \to X$ deux fonctions.

(a) Si $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$, montrer que f est injective et g est surjective.

(b) Trouver deux ensembles X, Y et deux fonctions f, g telles que $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in X$, mais où f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Exercice 6. *(Rappel Fonctions + inj/surjectivité)*
Trouver le domaine de définition $D = D(f) \subseteq \mathbb{R}$ et l'image $I = \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}$ des fonctions suivantes. Trouver ensuite un sous-ensemble $A \subseteq D$ tel que la restriction $f \colon A \to I$ est bijective, et déterminer la réciproque de cette fonction restreinte.

(a) $-2x + 1$.

(b) x^n ($n \in \mathbb{N}$ impair)

(c) x^n ($n \in \mathbb{N}$ pair)

(d) $\frac{1}{x}$

(e) $1 - x^2$

(f) $x^2 - 8x + 3$

(g) $\sin(2x)$

(h) $2\tan(x)$

(i) $\sin(\frac{\pi}{4}\sin(x))$

(j) $\frac{1}{x^2+1}$

(k) $\sqrt{25-x^2}-1$

(l) $f(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si } 0 < x \leq 2. \end{cases}$

Exercice 7. *(Rappel valeur absolue)*
Pour $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est définie par (rappel): $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$
Démontrer les propriétés suivantes:

(a) $|x| = \sqrt{x^2}$

(b) $|x| \geq 0$, et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(d) $|-x| = |x|$

(e) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

(f) $|x-y| = |y-x| =$ distance entre x et y.

Exercice 8. *(Rappel inéquations)*
Résoudre les inéquations suivantes (de variable n) en fonction du paramètre $\varepsilon > 0$.

(a) $\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$.

(b) $\left|\dfrac{n-1}{n} - 1\right| \leq \varepsilon$.

(c) $2^{-n} \leq \varepsilon$.

Exercice 9. *(Rappel distributivité)*
Simplifier l'expression $(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^n)$. En déduire que si $x \neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} x^n = 1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Exercice 10. *(V/F type examen)*
Vrai ou faux ?

(a) Il n'existe qu'une seule fonction bijective $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(b) Si $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ sont deux fonctions injectives, leur composée $g \circ f\colon X \to Z$ est injective.

(c) Si $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ sont deux fonctions surjectives, leur composée $g \circ f\colon X \to Z$ est surjective.

(d) Si une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, alors elle est injective.

(e) Si une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, alors elle est surjective.

(f) Si une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, alors elle est injective.

(g) Si une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, alors elle est surjective.

(h) Si une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective, alors elle est strictement monotone.