Analyse I — Série 12

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 08.12.2025

Exercice 1.
Déterminer le développement limité d'ordre n en $x_0 = 0$ des fonctions suivantes:

(a) $f(x) = \sin(3x), \quad n = 3$

(b) $f(x) = \log(2 + x), \quad n = 3$

(c) $f(x) = \log(\cos(x)), \quad n = 4$

(d) $f(x) = \log(1 + x - 2x^2), \quad n = 3$

(e) $f(x) = e^{\sin(x)}, \quad n = 4$

(f) $f(x) = \sqrt{1 + x}, \quad n = 3$

(g) $f(x) = \sqrt{1 + \sin(x)}, \quad n = 3$

(h) $f(x) = \dfrac{3}{(1 - x)(1 + 2x)}, \quad n = 4$

(i) $f(x) = e^{x^2}, \quad n$ quelconque

(j) $f(x) = \dfrac{x}{9 + x^2}, \quad n$ quelconque.

Indication: On pourra (si on le souhaite) tout faire sans dériver (à l'aide des DL vus en cours). Pour le (h), on pourra réécrire l'expression sous la forme $\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+2x}$.

Exercice 2.
Déterminer (i) la série de Taylor de $f(x)$ centrée en x_0, (ii) son rayon *et son domaine* de convergence et (iii) le développement limité de $f(x)$ en x_0 d'ordre $n \in \mathbb{N}$, dans les cas suivants:

(a) $f(x) = \dfrac{2}{3 + 4x}$ en $x_0 = 0$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$ en $x_0 = 2$.

(c) $f(x) = e^{-x}$ en $x_0 = 0$.

(d) $f(x) = \sinh(x)$ en $x_0 = 0$.

(e) $f(x) = \cosh(x)$ en $x_0 = 0$.

(f) $f(x) = \sin(x)$ en $x_0 = \pi$.

(g) $f(x) = \cos(x)$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

(h) $f(x) = e^x$ en $x_0 = 1$.

(i) $f(x) = \log(x)$ en $x_0 = 1$.

(j) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x_0 = 1$.

(k) $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$ en $x_0 = 0$.

Exercice 3.
Calculer les limites suivantes (en utilisant un développement limité !)

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \sin(x)}{x^5}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x + \sin(x) - \cos(x) - 2x}{x - \log(1 + x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(\sin(x)) - \sin(x)^2}{x^6}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x + \log(e^x - 2x)}{x^3}$

Exercice 4.
Trouver les trois premiers termes (non-nuls !) de la série de MacLaurin des fonctions suivantes.

(a) $f(x) = \log\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)$ (b) $f(x) = \tan(x)$ (c) $f(x) = \arctan(x)$

Exercice 5.
Montrer que $\sin(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} x^{2k+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.
Calculer les primitives ci-dessous, à l'aide de primitives déjà connues.

(a) $\displaystyle\int \frac{3x+4}{1+x^2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^3}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{\sinh(x)}{e^x+1}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}\,dx$

Exercice 7. ***(Difficile.)***
Montrer que toute fonction croissante $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable (au sens de Riemann).