

Exercice 1. (Fonctions de classe \mathcal{C}^n)

Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivante soit de classe \mathcal{C}^1 . Est-ce que f est de classe \mathcal{C}^2 dans ce cas ?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 2. (QCM type examen)

Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 2 + e^{-1/x^2} & \text{si } x < 0 \\ 2 \cos(x) + x^2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Alors

$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$

$f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^4(\mathbb{R})$

$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$

$f \in \mathcal{C}^4(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^5(\mathbb{R})$

Exercice 3. (Dérivée ?)

Montrer que la fonction $\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ **ne peut pas être** la dérivée d'une fonction $f(x)$.

Exercice 4. (Limites avec BH/DL)

Calculer les limites suivantes.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\log(x-1)}{x-2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x - \sin(x)}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\tan(x)}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\tanh(x) - 1)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}$

(h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} x \tan(x) - \frac{\pi}{2 \cos(x)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$

(f) $\lim_{x \downarrow 0} x^{\pi x}$

Exercice 5. (Étude de fonctions)

Déterminer les extremums locaux et globaux (s'ils existent) et les points stationnaires et d'inflexion des fonctions suivantes, et donner les intervalles où elles sont croissantes/décroissantes et convexes/concaves.

(a) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$ sur $[-6, 1]$.

(d) $f(x) = (x-1)^2 - 2|2-x| + 1$ sur $]2, 3[$.

(b) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1$ sur $] -6, 1[$.

(e) $f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$ sur \mathbb{R} .

(c) $f(x) = x^2 - \left| x + \frac{1}{4} \right| + 1$ sur $[-1, 1]$.

(f) $f(x) = x \log(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 6. (QCM type examen)

Le nombre de solutions réelles $x \in \mathbb{R}$ de l'équation $\frac{1}{(x+2)^3} + \frac{1}{(x-4)^5} = 0$ est

- 0 1 2 3

Exercice 7. (Propriétés de exp)

On considère la fonction exponentielle $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

(b) Montrer que pour tout polynôme $p(x)$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{\exp(x)} = 0$.

Remarque: Cela montre que exp croît plus vite que tout polynôme.

Exercice 8. (Convergences de suites définies par récurrence)

Étudier la convergence des suites définies par récurrence suivantes (en fonction de la valeur de départ a_0), et calculer leur limite si elle existe.

(a) $a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + 3}{4}$

(d) $a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 6}{5}$

(b) $a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(2 - 3a_n)$

(e) $a_0 \in]0, +\infty[, \quad a_{n+1} = \frac{2}{a_n} + 1$

(c) $a_0 \in \left[-\frac{2}{3}, +\infty[, \quad a_{n+1} = \frac{7}{3} - \frac{1}{1 + a_n}$

(f) $a_0 \in \mathbb{R}, \quad a_{n+1} = -3a_n^3$

Exercice 9. (V/F facile)

Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Vrai ou faux ?

(a) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante sur $[a, b]$.

(b) Si f est croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

(c) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

(d) Si f est strictement croissante sur $[a, b]$, alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$.

Exercice 10. (Développements limités ?)

Parmi les 32 phrases suivantes, déterminer lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses.

$$\cos(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 + x \\ 1 + 2x^2 \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} x\varepsilon(x) \\ x^2\varepsilon(x) \\ x^3\varepsilon(x) \\ x^4\varepsilon(x) \end{array} \right\} \quad \text{où } \varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction}$$

telle que $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon(0) = 0. \\ \varepsilon(0) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0. \end{array} \right\}$