Analyse I — Série 10

EPFL – Sections SIE/GC/SC — 24.11.2025

Exercice 1. *(Règles de dérivation)*
Soient $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x_0 \in D$.

(a) Démontrer la règle du produit: $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(b) En utilisant (a), démontrer la règle du quotient:

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x_0) = \Big(\frac{f'g - fg'}{g^2}\Big)(x_0).$$

Exercice 2. *(Dérivées)*
Calculer la dérivée des fonctions f suivantes, et donner le domaine de f et f'.

(a) $\tan(x)$

(b) $\cot(x) := \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

(c) $\dfrac{5x+2}{3x^2-1}$

(d) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

(e) $\sin^2(x)\cdot\cos(x^2)$

(f) $(3 + 9\tan x)\cos(2x)$

(g) $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+3}}\right)$

(h) $\dfrac{2e^x}{x^2-1}$

(i) $|x|\sin(x)$

(j) $|x|^3$

(k) $\arcsin(x)$

(l) $\arccos(x)$

(m) $\arctan(x)$

(n) $\sqrt{\sin\left(\sqrt{\sin(x)}\right)}$

(o) $((2x^4 + e^{-(4x+3)}))^{\frac{3}{5}}$

(p) $\log(4^{\sin(x)})e^{\cos(4x)}$

(q) x^x

(r) x^{x^x}

Exercice 3. *(Dérivées d'ordre supérieur)*
Pour les fonctions suivantes, calculer les dérivées $f^{(n)}$ d'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) $f(x) = x^k$ (où $k \in \mathbb{Z}$) (b) $f(x) = \sin(2x) + 2\cos(x)$ (c) $f(x) = \log(x)$

Exercice 4. *(Théorème des accroissements finis généralisé.)*

(a) Soient $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in\,]a,b[$. Montrer qu'il existe un $u \in\,]a,b[$ tel que

$$\frac{f'(u)}{g'(u)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Indication: Appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$h(x) = f(x) - \Big(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\Big).$$

(b) Utiliser le TAF généralisé pour démontrer le TAF.

Exercice 5. *(QCM type examen, 1/2)*
Soit $f(x) = x + e^x$. Alors $(f^{-1})'(1)$ vaut

☐ 1 ☐ 0 ☐ $1 + \frac{1}{e}$ ☐ $\frac{1}{2}$

Exercice 6. *(QCM type examen, 2/2)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective, différentiable sur $\mathbb{R}$, et telle que la droite tangente au point $(-1, 2)$ du graphe de f a l'équation $y = 6x + 8$. Alors $(f^{-1})'(2)$ vaut

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ 2 ☐ -1 ☐ 6

Exercice 7. *(Exp et log dans d'autres bases)*
Pour $a > 0$, et $a \neq 1$, on définit les fonctions:

$$\exp_a(x) = \exp\left(\log(a) \cdot x\right), \qquad \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}.$$

Montrer que:

(a) $\exp_a\colon \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est bijective, de réciproque $\log_a\colon\ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

(b) $\exp_a(\frac{p}{q}) = a^{\frac{p}{q}}$ pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, justifiant la définition $a^x = \exp_a(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(c) $(a^x)' = \log(a) \cdot a^x$, et $\log_a'(x) = \dfrac{1}{\log(a) \cdot x}$.

(d) a^x est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $a < 1$.

(e) $\log_a(b^x) = x \cdot \log_a(b)$.

(f) $\log_b(x) = \dfrac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ *(Changement de base)*.

Exercice 8. *(Fonctions trigonométriques hyperboliques)*
Montrer les propriétés suivantes des **fonctions trigonométriques hyperboliques**, définies comme les fonctions trigonométriques mais sans le i, c'est à dire:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

(a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
(Les points $(\cosh(t), \sinh(t))$ sont donc sur l'*hyperbole* d'équation $x^2 - y^2 = 1$)

(b) $\sinh'(x) = \cosh(x)$ et $\cosh'(x) = \sinh(x)$.

(c) $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective, et sa réciproque est $\operatorname{arcsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(d) $\cosh\colon [0, +\infty[\to [1, +\infty[$ est bijective, et sa réciproque est $\operatorname{arccosh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$

Exercice 9. *(V/F type examen)*
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Vrai ou faux ?

(a) Si f est dérivable et paire/impaire, alors f' est paire/impaire (**4 questions**)

(b) Si f est dérivable à gauche et à droite en $a \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a.

(c) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) = \sqrt{f(x)^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(d) Si f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors f' est continue sur le même intervalle.

(e) Si f est dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$, alors $f \circ f$ est aussi dérivable en x_0.

(f) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(a) = 0$, alors $(f \circ f \circ f \circ f)'(a) = 0$.